Table des matières

Pré-requis

Objectifs

I. Normes en dimension finie

I.1 Définition

Définition 1.

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. L'application $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ est une **norme** si :

i) $\forall x \in E, \ \|x\| \geq 0$ (positivité) ;

ii) $\forall x \in E, \ [\ \|x\| = 0 \ \Rightarrow x = 0_E\ ]$ (séparation) ;

iii) $\forall x \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité) ;

iv) $\forall (x, y) \in E^2, \ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire) ;

Définition 2.

On dit que $(E, \| \ \|)$ est un $\mathbb{K}$-espace-vectoriel normé si E est un $\mathbb{K} - e.v.$ et si $\| \ \|$ est une norme sur E.

exemple 1. Normes infinie $\| \ \|_\infty^I$ sur l'espace vectoriel $\mathcal{F}_b(I, \mathbb{K})$ des fonctions bornées sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$..

lemme 1. *L'égalité* $\sup(kA) = k\sup(A)$ *pour* A *partie non vide de* $\mathbb{R}$ *et* $k \in \mathbb{R}^+$ *peut être directement utilisée.*

I.2 Normes usuelles sur $\mathbb{R}^n$.

On se place dans le cas ou $E = \mathbb{R}^n$, pour un entier $n \geq 1$.

exemple 2. L'application $\| \ \|_\infty : x \longmapsto \max\{|x_i|, \ 1 \leq i \leq n\}$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, appelée **norme infinie**.

dém :

La positivité découle de la positivité de celle de la valeur absolue. L'homogénéïté est directe.

$\|x\|_\infty = 0 \Rightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!], \ |x_i| = 0) \Rightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!], \ x_i = 0) \Rightarrow x = 0_E$

Pour $x, y \in E$, on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$: $|x_i + y_i| \leq |x_i| + |y_i| \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$, donc $\|x + y\|_\infty = \max\{|x_i + y_i|, \ 1 \leq i \leq n\} \leq \|x\|_\infty + \|y\|_\infty$

D'où le résultat. □

exemple 3. L'application $\| \ \|_1 : x \longmapsto \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i|$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, appelée **norme** 1.

dém :

La positivité découle de la positivité de celle de la valeur absolue.

$\|x\|_\infty = 0 \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i| = 0 \Rightarrow (\forall i \in [\![1, n]\!], \ x_i = 0) \Rightarrow x = 0_E$

Pour $x \in E$, $\lambda \in \mathbb{R}$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |\lambda x_i| = |\lambda| \sum_{i=1}^{n} |x_i|$, donc $\|\lambda x\|_1 = |\lambda| \|x\|_1$

Pour $x, y \in E$, on a : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} |x_i + y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i| + \sum_{i=1}^{n} |y_i|$, donc $\|x + y\|_1 \leq \|x\|_1 + \|y\|_1$

D'où le résultat. □

exemple 4. L'application $\| \ \|_2 : x \longmapsto \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$ est une norme sur $E = \mathbb{R}^n$, appelée **norme euclidienne** ou **norme 2**.

dém : Comme la précédente pour la positivité, le caractère défini et l'inégalité triangulaire. Pour l'inégalité triangulaire, cela résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. □

I.3 Norme associée à un produit scalaire

Rappels de PCSI : produit scalaire

Définition 3.

Une application $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ est dite **bilinéaire** si
$\forall y, y, z \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ < x; y + \lambda z > = < x; y > + \lambda < x; z >$ et $< x + \lambda y; z > = < x; z > + \lambda < y; z >$

Définition 4 (Produit scalaire).

L'application $< \bullet; \bullet >: E \times E \to \mathbb{R}$ est un **produit scalaire** réel si :

i) $< \bullet; \bullet >$ est **symétrique**
(i.e. $\forall v, w \in E, < w; v > = < v; w >$) ;

ii) $< \bullet; \bullet >$ est **bilinéaire**

iii) $< \bullet; \bullet >$ est **positive** (i.e. $\forall v \in E, < v; v > \geq 0$) ;

iv) $< \bullet; \bullet >$ est **définie** (i.e. $\forall v \in E, (< v; v > = 0 \ \Rightarrow v = 0_E)$) ;

exemple 5. Pour tous $x = (x_1, \dots, x_n) \in E$ et $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ on pose :
$< x; y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$, produit scalaire euclidien canonique (p.s. usuel)

exemple 6. Pour $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ on pose :
$< f; g > = \int_0^1 f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$, produit scalaire sur E.

Définition 5.

Si $< \bullet; \bullet >$ est un produit scalaire sur E on dit que l'application $\| \ \| :\ x \mapsto \sqrt{< x; x >}$ est la **norme associée**

Proposition 2 (propriétés de la norme associée à un p.s.).

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel euclidien pour le produit scalaire $< \ ; \ >$ et $\| \ \|$ la norme associée.
L'application $\| \ \| : E \to \mathbb{R}$ vérifie les propriétés (caractérisant une **norme**) :

i) $\forall x \in E,\ \|x\| \geq 0$ (positivité) ;

ii) $\forall x \in E,\ [\ \|x\| = 0 \ \Rightarrow x = 0_E\ ]$ (séparation) ;

iii) $\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ (homogénéité) ;

iv) $\forall (x, y) \in E^2,\ \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (inégalité triangulaire) ;

<u>démonstration :</u> la positivité et le caractère séparé de la norme découlent directement de la positivité et du caractère défini du produit scalaire. L'homogénéité découle de la bilinéarité.
Enfin l'inégalité de Cauchy-Schwarz assure l'inégalité triangulaire. □

Proposition 3 (Inégalité de Cauchy-Schwarz (rappel PCSI)).

E espace vectoriel muni du p.s. $<\bullet;\bullet>$. Alors $\boxed{\forall (u,v)\in E^2,\ |<u|v>|\leq \sqrt{<u|u>}\sqrt{<v|v>}}$
en particulier, si $\|\ \|\ : x\ \mapsto \sqrt{<x|x>}$, on a : $\boxed{\forall (u,v)\in E^2,\ |<u|v>|\ \leq\ \|u\|\ \|v\|}$.
En outre, il y a égalité si et seulement si u et v sont colinéaires.

démonstration :
Soient $x,y\in E$ fixés. On considère $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ t\mapsto <x+ty,x+ty>$.
a) f est une fonction polynôme de degré inférieur ou égal à 2 :
$\forall t,\ f(t)=<x|x>+<ty|x>+<x|ty>+<ty|ty>=<x|x>+2<x|y>t+<y|y>t^2$.
b) $<\ |\ >$ est positive, donc pour tout $t\in\mathbb{R},\ f(t)\geq 0$.
c) Le discriminant Δ associé à f doit donc être négatif (f ne peut pas changer de signe sur $\mathbb{R}$).
$\Delta\leq 0 \iff [2<x|y>]^2-4<y|y><x|x>\leq 0 \iff 4<x|y>^2\leq 4<y|y><x|x>$
$\iff |<x|y>|\leq\sqrt{<y|y>}\sqrt{<x|x>}$, car la racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$. $\square$

I.4 Normes équivalentes

Définition 6.

Deux normes N et $\tilde N$ sur E sont dites équivalentes si :

$$\exists (D,G)\in\mathbb{R}_*^+;\ \forall x\in E,\ G\ \tilde N(x)\leq N(x)\leq D\ \tilde N(x)$$

exemple 7. Pour tout $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$, on a :

$$\|x\|_\infty\leq\|x\|_2\leq\sqrt{n}\|x\|_\infty$$

Théorème 4 (Admis).

Soit $E=\mathbb{R}^n$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de **dimension finie** n.
Si N et $\tilde N$ sont deux normes sur E, alors elles sont équivalentes.

Contre-exemple en dimension infinie $\|\|_1$ et $\|\|_\infty$ non équivalentes sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ prendre $f_n : t\mapsto\cos(nt)$, $\|f_n\|_1\to 0$ mais $\|f_n\|\infty=1$

II. Distances, topologie

II.1 Distance associée à une norme

Proposition 5.

Si N est une norme sur E, l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}^+,\ (x,y) \longmapsto \mathbb{N}(y-x)$ est appelée distance associée à N et vérifie :

i) $\forall x, y \in E,\ d(x,y) = d(y,x)$ (symétrie) ;

ii) $\forall x, y, z \in E,\ d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$ (inégalité triangulaire) ;

iii) $\forall x, y \in E, [\ d(x,y) = 0\ \Rightarrow x = y\ ]$ (séparation) ;

Remarque 1. $\|x-a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\|\ \|$ est la norme euclidienne usuelle.

Remarque 2. Il existe des distances non associées à des normes, exemple Hamming

II.2 Boules

2.a) Boule ouverte

On se place dans $(E, \|\ \|)$ e.v.n. et on note d la distance associée.

Définition 7.

Soient $A \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle **boule ouverte** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a,r)$ défini par : $\boxed{B(A,r) = \{X \in E, d(A,X) < r\} = \{X \in E, \|X - A\| < r\}}$

exemples : $B_f(a,0) = \{a\}$,
$B_f(a,1) = \{x \in E, \|x-a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité »fermée de centre a.

Remarque 3. $\|x-a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\|\ \|$ est la norme euclidienne usuelle.
exemples : $B(a,0) = \emptyset$, $B_f(a,0) = \{a\}$, $B(a,1) = \{x \in E, \|x-a\| < 1\}$ est dite « boule unité »ouverte,
$B_f(a,1) = \{x \in E, \|x-a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité »fermée.

2.b) Boule fermée

Définition 8.

Soient $a \in E$ et $r \in \mathbb{R}^+$. On appelle **boule fermée** de centre a et de rayon r l'ensemble, noté $B(a,r)$ défini par : $\boxed{B_f(a,r) = \{x \in E, \|x-a\| \leq r\}}$

exemples : $B_f(a,0) = \{a\}$,
$B_f(a,1) = \{x \in E, \|x-a\| \leq 1\}$ est dite « boule unité »fermée de centre a.

Remarque 4. $\|x-a\|$ est la distance euclidienne entre a et x lorsque $\|\ \|$ est la norme euclidienne usuelle.

II.3 Parties bornées

Définition 9.

Une partie $\mathcal{A}$ de l'espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$ est dite **bornée** (par une constante M) si :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ ; \ \forall x \in \mathcal{A}, \ \|x\| \leq M$$

Remarque 5. Une partie A de E est dite bornée s'il existe $R > 0$ tel que $A \subset B_f(0, R)$

exemple 8. $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 ; x^2 + y^2 \leq 4\}$ est borné (par 2 pour la norme euclidienne usuelle)

exemple 9. $f : E \to \mathbb{R}, \ x \mapsto e^{-\|x\|_E}$

II.4 Suites bornées

Définition 10.

Une suite $u \in E^{\mathbb{N}}$ est dite **bornée** (par une constante M) si :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ ; \ \forall n \in \mathbb{N} \in \mathcal{A}, \ \|u_n\| \leq M$$

II.5 Fonctions bornées

Définition 11.

Soient $(E, \| \ \|_E)$ et $(F, \| \ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés.
Une application $f : E \to F$ est dite **bornée** (par une constante M) si :

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ ; \ \forall x \in E, \ \|f(x)\|_F \leq M$$

III. Limites d'une suite vectorielle

III.1 Définition

Définition 12.

Dans un espace vectoriel normé $(E, \| \ \|)$, une suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$ converge vers $L \in E$ si

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq N, \ \|U_n - L\| \leq \varepsilon$$

Si tel est le cas, on note : $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = L$

Remarque 6. En dimension finie, en notant $\| \ \|_\infty : X \mapsto \max\limits_i |x_i|$ la norme infinie, cela revient à :

$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0, \ \|X_n - L\|_\infty \leq \varepsilon}$

Comme toutes les normes équivalentes (dim finie), cette notion de limite quantifiée s'étend pour toute autre norme sur $\mathbb{R}^p$:

$\boxed{\forall \varepsilon > 0, \ \exists n_0 \in \mathbb{N}, \ \forall n \geq n_0, \ \|X_n - L\|_F \leq \varepsilon}$

III.2 Propriétés des limites

2.a) Cas de la dimension finie

Théorème 6 (limite et coordonnées).

Dans E e.v.n. de dimension **finie** égale à p muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \ell \iff \left(\forall i \in [\![1,p]\!],\ \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n,i} = \ell_i\right)$,
où l'indice i désigne la $i$ème coordonnée dans la base $\mathcal{B}$.

démonstration : comme $\|\ \|$ est équivalente à $\|\ \|_\infty$, on obtient le résultat. □

Définition 13 (limite en dimension finie).

On dit qu'une suite $(X_n(x_{n,1};\dots;x_{n,p}))_{n\in\mathbb{N}}$ de vecteurs de $F = \mathbb{R}^p$ converge vers $L(\ell_1;\dots;\ell_p)$ si :

$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ x_{n,i} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell_i$$

exemple 10. La suite $(U_n) = ((1+1/n)^n, \sin(1/n))$ converge vers $(\mathrm{e}, 0)$.

Notation 1. *Lorsqu'une suite vectorielle (X_n) converge vers une limite L, on note cela :* $\boxed{X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} L}$

2.b) Généralités

Proposition 7.

Toute suite convergente est bornée.

démonstration : ce résultat a été vue pour une suite réelle en PCSI. Pour une suite vectorielle on utilise la norme infinie : toutes les composantes sont bornées.

Proposition 8.

Toute suite extraite d'une suite convergente converge, vers la même limite.

démonstration : ce résultat a été vue pour une suite réelle en PCSI. Pour une suite vectorielle on utilise la norme infinie : cela est vraie pour toutes les composantes.

exemple 11. Suite de matrices

Proposition 9 (opérations sur les limites).

Si $X_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} X$, $Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} Y$, alors pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on a :
$\lambda X_n + Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \lambda X + Y$

démonstration : on se ramène au cas réel pour les composantes.

Remarque 7. Idem pour les limites infinies et les théorèmes sur les cas d'indétermination de limites restent inchangés sur les composantes.

IV. Fermés, limites.

IV.1 Notion de point adhérent

Définition 14.

Soit Δ une partie de E. Un point $A \in \Delta$ est dit **point adhérent** à Δ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ B(A, \varepsilon) \cap \Delta \neq \emptyset$$

Définition 15.

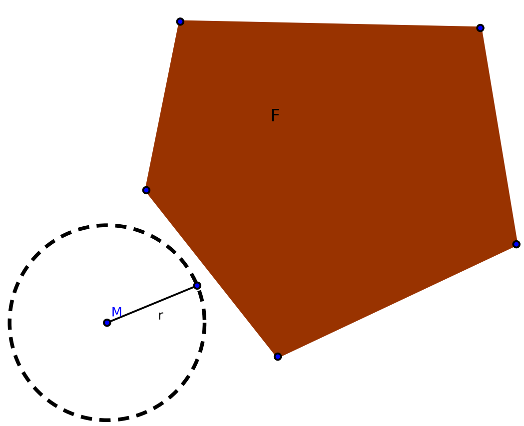
Pour $D \subset E$, l'**adhérence** de A, notée $\overline{A}$ ou $Adh(A)$ est définie par $\overline{D} = \{x \in E; x \texttt{ adhérent à D}\}$

$D \subset \overline{D}$.

IV.2 Fermés bornées, et bornes atteintes

Définition 16.

Soit Δ une partie de E est dite **fermée** si $\forall x \notin \Delta,\ \exists \varepsilon > 0; B(x, \varepsilon) \cap \Delta = \emptyset$



Proposition 10 (critère séquentiel).

Une partie F est fermée ssi ssi toute suite $(u_n) \in F^{\mathbb{N}}$ convergente vérifie $\lim\limits_{n} u_n \in F$.

Remarque 8. $F \subset \overline{F}$, avec égalité ssi F est une partie fermée

Théorème 11.

Théorème des bornes atteintes : toute fonction continue sur une partie fermée bornée en dimension finie y est bornée et atteint ses bornes.

IV.3 limite d'une fonction vectorielle

Définition 17 (Limite).

Soient $(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|\ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, Δ une partie de E, et $A \in E$ un point adhérent à Δ. Une application $f : E \to F$ **admet une limite** L en A si :

$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall X \in \Delta,\ \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - L\|_F \leq \varepsilon}$

Si tel est le cas on note cela $\lim\limits_{X \to A,\ X \in \Delta} f(X) = L$ ou $f(X) \xrightarrow[X \to A]{} L$

Remarque 9. Cela ne dépend pas du choix de la norme $\|\ \|$ sur E en dimension finie : elles sont toutes équivalentes !

IV.4 Limite séquentielle

Proposition 12.

En dimension finie, la notion de limite ne dépend pas de la norme choisie.

démonstration : elles sont toutes équivalentes ! □

Proposition 13 (Caractérisation séquentielle).

Soient $(E, \|\ \|_E)$ et $(F, \|\ \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, $A \in E$,$\ell \in F$ et $f : E \to F$.
Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. $\lim\limits_{X \to A} f(X) = \ell$
2. Pour toute suite $(X_n) \in E^n$ telle que $\lim\limits_{n \to +\infty} X_n = A$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} f(X_n) = \ell$.

démonstration :

- $1) \Rightarrow 2)$:

Supposons 1). Pour (X_n) une suite qui converge vers A.
Soit $\varepsilon > 0$; on sait qu'il existe $\eta > 0$ tel que : $\forall X \in D,\ \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - \ell\|_F \leq \varepsilon$
Mais comme il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ \|X_n - A\|_E \leq \eta$, on obtient :
$\forall n \geq N,\ \|f(X) - \ell\|_F \leq \varepsilon$, donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f(X_n) = \ell$

- $1) \Rightarrow 2)$: On va démontrer la contraposée :

« NON $f(X) \xrightarrow[X \to A]{} \ell$ »$\Rightarrow$ « il existe une suite (X_n) convergente vers A telle que $(f(X_n))$ ne converge pas vers ℓ »
Supposons que $f(X)$ ne tend pas vers ℓ lorsque $X \to A$. En niant la définition de limite, on obtient l'existence d'un $\varepsilon > 0$ tel que :

$$\forall \eta > 0,\ \exists x \in D;\ [\|X - A\|_E \leq \eta \text{ et } \|f(X) - \ell\|_F > \varepsilon]$$

En particulier, on posant $\eta = \dfrac{1}{n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \exists X_n \in E;\ [\|X_n - A\|_E \leq \frac{1}{n} \text{ et } \|f(X_n) - \ell\|_F > \varepsilon]$$

Mais alors la suite (X_n) converge vers A, alors que la suite $f(X_n)$ ne peut converger vers ℓ. □.

IV.5 Opérations sur les limites

Proposition 14.

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$- e.v. de dimension finie, $a \in E$, $b, c \in F$.
Si $f(X) \xrightarrow[X \to a]{} b$ et si $g(X) \xrightarrow[X \to a]{} c$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\lambda\, g(X) + f(X) \xrightarrow[X \to a]{} \lambda\, c + b$$

démonstration : OK pour les suites, d'après le cours de PCSI. La preuve est identique, avec des normes □

Proposition 15.

Soient E, F, G des $\mathbb{K}$- e.v. de dimension finie, $a \in E$, $b \in F$, $c \in G$.
Si $f(X) \xrightarrow[X \to a]{} b$ et si $g(Y) \xrightarrow[Y \to b]{} c$, alors

$$g(f(X)) \xrightarrow[X \to a]{} c$$

démonstration : OK pour les suites, d'après le cours de PCSI. La preuve est identique, avec des normes □

V. Continuité d'une fonction

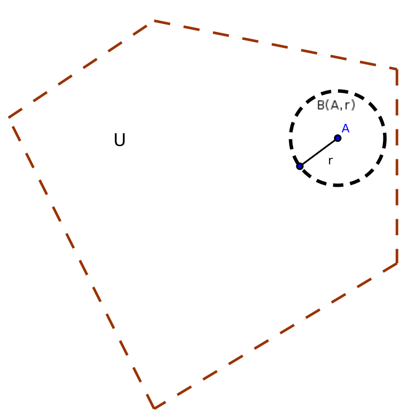
V.1 Partie ouverte

Définition 18.

Soit Δ une partie de E. Un point $M \in \Delta$ est dit **point intérieur** à Δ s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(A, \varepsilon) \subset \Delta$

Définition 19.

Une partie Soit Δ de E est dite **ouverte** si pour tout $X \in \Delta$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $B(A, \varepsilon) \subset \Delta$



V.2 Définition

Définition 20 (Continuité).

Soient $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, Δ une partie de E, et $A \in E$ un point intérieur à Δ.
Une application $f : E \to F$ est dite **continue** en A si :
$\boxed{\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall X \in \Delta,\ \|X - A\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(X) - f(A)\|_F \leq \varepsilon}$

Définition 21.

Soient $(E, \| \|_E)$ et $(F, \| \|_F)$ deux espaces vectoriels normés, et $\mathcal{A} \subset E$.
Une application $f : E \to F$ est dite **continue** sur $\mathcal{A}$ si elle est continue en tout point de $\mathcal{A}$

exemple 12. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \mathrm{e}^x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

exemple 13. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3; t \mapsto (\cos(t), \sin(t), t)$ est continue sur $\mathbb{R}$.

V.3 Continuité en dimension finie

Remarque 10. Si E et F sont des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimensions **finies**, alors $\| \|_E$ est équivalente à $\| \|_{E,\infty}$ et $\| \|_F$ est équivalente à $\| \|_{F,\infty}$.

En particulier, il existe deux constantes $K > 0$ et $C > 0$ telles que :
$\forall x \in E,\ \|x\|_{E,\infty} \leq K\|x\|_E$ et $\forall y \in F,\ \|y\|_{F,\infty} \leq C\|y\|_F$

Donc si f de $(E, \| \|_E)$ vers $(F, \| \|_F)$ est continue, pour tout $\varepsilon > 0$, en prenant η' associé à $\varepsilon' = \varepsilon/C$, on a :
si $\|X - A\|_{E,\infty} \leq \eta'/K$, alors $\|X - A\|_E \leq \eta$, donc $\|f(X) - f(A)\|_{F,\infty} \leq C\|f(X) - f(A)\|_F \leq \varepsilon$
Ainsi $\|X - A\|_{E,\infty} \leq \eta'/K \Rightarrow \|f(X) - f(A)\|_F \leq \varepsilon$
On en déduit que la notion de continuité ne dépend pas des normes choisies

Théorème 16.

Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n, (x_1, \dots, x_p) \to (f_1(x_1, \dots, x_p);\ \dots;\ f_n(x_1, \dots, x_p))$, et $(f_i)_{1\leq i\leq n}$ ses composantes.
Alors f est continue sur $\mathbb{R}^n$ si et seulement si ses composantes le sont.

<u>démonstration :</u> le résultat est vrai pour $\mathbb{R}^n$ muni de la norme infinie $\|y\|_\infty = \max\limits_{1\leq i\leq n} |y_i|$

exemple 14. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; (x, y) \mapsto \mathrm{e}^x + y$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

V.4 Propriétés des fonctions continues

Proposition 17.

Toute composée d'applications continues est continue.

Définition 22.

Soit $k \in \mathbb{R}^+$. Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite k-**lipschitzienne** si :
$\forall x, y \in E,\ \|f(y) - f(x)\|_F \leq k\|y - x\|_E$.

i.e. : les images « s'éloignent »au plus d'un facteur k.

Définition 23.

Une application $f : E \longrightarrow F$ est dite **lipschitzienne** s'il existe un réel positif k telle qu'elle soit k-lipschitzienne

exemple 15. l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \to \operatorname{Arctan} x$, est 1-lipschitzienne, car : $\forall x, y \in \mathbb{R},\ |\ \operatorname{Arctan} y - \operatorname{Arctan} x| \leq \sup\limits_{t\in\mathbb{R}} \left\{\dfrac{1}{1+t^2}\right\} |y - x|$, d'après l'inégalité des accroissements finis.

exemple 16. l'application $\|\quad\|_E : E \to \mathbb{R}$, est 1-lipschitzienne, car $\forall x, y \in E,\ |\|y\|_E - \|x\|_E| \leq \|y - x\|_E$

Théorème 18.

Si $f : E \to F$ est lipschitzienne, alors elle est continue sur E.

démonstration :
Soit $a \in E$ fixé, montrons que f est continue en a. Soit $k \geq 0$ tel que f est k-lipschitzienne. Le cas $k = 0$ est trivial. supposons $k > 0$.

Pour tout $\varepsilon > 0$ fixé, en posant $\eta = \dfrac{\varepsilon}{k}$, on a alors :

$$\forall x \in E, \quad \|x - a\|_E \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - f(a)\|_F \leq k\eta = \varepsilon$$

Ce qui montre la continuité de f en a $\square$.

Définition 24.

On appelle application polynomiale toute application de la forme $P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K},\ (x_1, \dots, x_n) \mapsto \sum\limits_{j=0}^{d} (\sum\limits_{i_1+\cdots+i_n=j} a_{i_1,\dots,i_n}) x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$.

Théorème 19 (continuité des applications linéaires en dimension finie)**.**

Toute application linéaire en dimension finie est continue.
Toute application multilinéaire en dimension finie est continue.

démonstration : lipschitzienne...

Théorème 20.

Toute application polynomiale $P : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}$ est continue sur $\mathbb{K}^n$.

démonstration :
Toute fonction monôme $M : (x_1, \dots, x_n)$ est un produit de fonctions continues, donc est continue. $\square$

Proposition 21 (continuité et composantes).

$f : I \to \mathbb{R}^n$ est continue en a si et seulement si ses composantes $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{R}$ le sont.

VI. Topologie dans un e.v.n.

VI.1 Points intérieurs, partie ouverte

Un ensemble est ouvert si tous ses points sont intérieurs (pas de "bord").

Définition 25.

Pour $A \subset E$, l'**intérieur** de A, notée A° est l'ouvert défini par $A^\circ = \{x \in E; x \texttt{ intérieur à A}\}$

Remarque 11. $A \supset A^\circ$, avec égalité ssi A est une partie ouverte

Proposition 22.

Les ouverts sont stables par réunion (finie ou dénombrable) et intersection finie

VI.2 Propriétés avancées

2.a) Ouverts

Proposition 23.

L'image réciproque d'un ouvert par une application continue est un ouvert.

Application $\{x; f(x) > 0\}$ ouvert

Proposition 24.

L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

Application $\{x; f(x) \geq 0\}$ fermé

exemple 17. Pour $f : (x, y) \longmapsto \sqrt{1 + x^2 + y^2} - 2$ continue,
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{1 + x^2 + y^2} > 2\} = f^{-1}(]0, +\infty[)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

2.b) Fermés

Proposition 25.

Une partie est fermée ssi son complémentaire F^C est ouverte.

Proposition 26.

Les fermés sont stables par réunion (finie ou dénombrable) et intersection finie.

Proposition 27.

L'image réciproque d'un fermé par une application continue est un fermé.

exemple 18. Pour $f : (x, y) \longmapsto \sqrt{1 + x^2 + y^2} - 2$ continue,
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; \sqrt{1 + x^2 + y^2} \geq 2\} = f^{-1}([0, +\infty[)$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

Proposition 28 (critère séquentiel).

Une partie F est fermée ssi toute suite de F convergente converge dans F.

2.c) Parties denses

Définition 26.

F dense dans E si $\overline{F} = E$.

Proposition 29.

$\det$ est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

application $GL_n(\mathbb{R})$ est dense dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ par continuité du déterminant et critère séquentiel ! ! !

VI.3 Parties convexes

Définition 27.

C partie convexe de E si : $\forall x, y \in F,\ [x, y] = \{(1 - t)x + ty,\ t \in [0, 1]\} \subset C$.

VI.4 Notions topologiques

Remarque 12. Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.

Nouveau programme 2022

Espaces vectoriels normés

Cette section vise les objectifs suivants :

- *généraliser au cas des espaces vectoriels sur $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ certaines notions (convergence de suites, limite et continuité de fonctions) étudiées en première année dans le cadre de l'analyse réelle, indispensables pour aborder l'étude des suites de matrices, des fonctions à valeurs vectorielles et du calcul différentiel ;*
- *fournir un cadre topologique à la convergence des suites et séries de fonctions.*

Les notions seront illustrées par des exemples concrets et variés.

Il convient de souligner l'aspect géométrique des concepts topologiques à l'aide de nombreuses figures.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Normes	
Norme sur un espace vectoriel réel ou complexe. Espace vectoriel normé. Norme associée à un produit scalaire sur un espace préhilbertien réel.	Normes usuelles $\| \|_1$, $\| \|_2$ et $\| \|_\infty$ sur $\mathbb{K}^n$. Norme $\| \|_\infty$ sur un espace de fonctions bornées à valeurs dans $\mathbb{K}$. L'égalité $\sup(kA) = k\sup(A)$ pour A partie non vide de $\mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{R}^+$ peut être directement utilisée.
Distance associée à une norme. Boule ouverte, boule fermée, sphère.	
Partie convexe.	Convexité des boules.
Partie bornée, suite bornée, fonction bornée.	
b) Suites d'éléments d'un espace vectoriel normé	
Convergence et divergence d'une suite. Unicité de la limite. Opérations sur les limites. Une suite convergente est bornée. Toute suite extraite d'une suite convergente est convergente.	Exemples dans des espaces de matrices, dans des espaces de fonctions.
c) Comparaison des normes	
Normes équivalentes.	Invariance du caractère borné, de la convergence d'une suite. Utilisation de suites pour montrer que deux normes ne sont pas équivalentes. La comparaison effective de deux normes n'est pas un objectif du programme. On se limite en pratique à des exemples élémentaires.
d) Topologie d'un espace vectoriel normé	
Point intérieur à une partie.	
Ouvert d'un espace normé.	Une boule ouverte est un ouvert.
Stabilité par réunion quelconque, par intersection finie.	
Fermé d'un espace normé.	Caractérisation séquentielle. Une boule fermée, une sphère, sont des fermés.
Stabilité par réunion finie, par intersection quelconque.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Point adhérent à une partie, adhérence.	L'adhérence est l'ensemble des points adhérents. Caractérisation séquentielle. Toute autre propriété de l'adhérence est hors programme.
Partie dense.	
Invariance des notions topologiques par passage à une norme équivalente.	

e) Limite et continuité en un point

Limite d'une fonction en un point adhérent à son domaine de définition.	Caractérisation séquentielle.
Opérations algébriques sur les limites, composition.	
Continuité en un point.	Caractérisation séquentielle.

f) Continuité sur une partie

Opérations algébriques, composition.	
Image réciproque d'un ouvert, d'un fermé par une application continue.	Si f est une application continue de E dans $\mathbb{R}$ alors l'ensemble défini par $f(x) > 0$ est un ouvert et les ensembles définis par $f(x) = 0$ ou $f(x) \geqslant 0$ sont des fermés.
Fonction lipschitzienne. Toute fonction lipschitzienne est continue.	

g) Espaces vectoriels normés de dimension finie

Équivalence des normes en dimension finie.	La démonstration est hors programme. La convergence d'une suite (ou l'existence de la limite d'une fonction) à valeurs dans un espace vectoriel normé de dimension finie équivaut à celle de chacune de ses coordonnées dans une base.
Théorème des bornes atteintes : toute fonction réelle continue sur une partie non vide fermée bornée d'un espace vectoriel normé de dimension finie est bornée et atteint ses bornes.	La démonstration est hors programme.
Continuité des applications linéaires, multilinéaires et polynomiales.	La notion de norme subordonnée est hors programme. Exemples du déterminant, du produit matriciel.