

Méthodes à retenir :

- Savoir dominer $|f(x, t)|$ indépendamment du paramètre externe x par une fonction $t \mapsto \varphi(t)$ intégrable.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆

On pose $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2 + t^2} dt$.

Déterminer l'ensemble de définition de F .

Exercice 2 ☆☆

Montrer que la fonction $G : x \mapsto \int_0^1 e^{xt} \sqrt{t} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} , et donner l'expression de sa dérivée.

Exercice 3 ☆☆

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $f_x :]0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $\ln(1 + t^x)$.

Soit $F : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^1 \ln(1 + t^x) dt$

1. Montrer que $f_x(t) \underset{t \rightarrow 0}{\sim} t^x$.
2. En déduire que F est définie et continue sur $]0, +\infty[$.

II. Exercices

Exercice 4 ☆☆

Justifier que $f : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t} dt$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

Exercice 5 ☆☆☆

Déterminer l'ensemble maximal (pour l'inclusion) Δ tel que $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \sqrt{1 + tx} e^{-t^2} dt$ est définie, continue et dérivable sur Δ .

Exercice 6 ☆☆

Soit $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ une application continue et bornée sur \mathbb{R}^+ . Montrer que

$F : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-tx} dt$ est définie et tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 7 ☆☆☆ Mines-Télécom

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos xt}{t^2} e^{-t} dt$.

1. Montrer que F est définie sur \mathbb{R} et paire.
2. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R}$, $|\sin u| \leq |u|$.
3. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^1 .
4. Montrer que F est de classe \mathcal{C}^2 et déterminer F'' .
5. Déterminer la fonction F .

Exercice 8 ☆☆☆

Etudier la fonction $f : x \mapsto \int_x^{2x} \frac{dt}{\sqrt{t + t^3}}$, puis tracer sa courbe représentative C_f .

On pourra montrer que pour tout $x > 0$, $0 < f(x) \leq \frac{x}{\sqrt{x + x^3}}$.

Exercice 9 ☆☆☆

Soit $F : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^x}{1 + t} dt$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F .
2. Avec le changement de variable $t = u^2$, calculer $F(1/2)$.
3. En déduire $F(3/2)$.

Exercice 10 ★★★★★ *la fonction Gamma*

On considère la fonction

$$\Gamma :]0, +\infty[, x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt$$

- 1) Justifier la définition ci-dessus, puis étudier sa continuité.
- 2) Calculer $\Gamma(1)$.
- 3) Montrer que pour tout $x > 0$, $\Gamma(x + 1) = x \Gamma(x)$ (*).
- 4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n + 1) = n!$
- 5) Montrer que Γ est de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R} et calculer $\Gamma^{(2)}$.
- 6) Montrer que Γ' est croissante sur $]0, +\infty[$.
- 7) A l'aide de (*), montrer que $\Gamma(x) \underset{x \rightarrow 0^+}{\sim} \frac{1}{x}$.
- 8) Calculer la $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\Gamma(x)}{x}$.

On pourra remarquer que Γ est minorée par $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$, et que $\frac{\Gamma(x)}{x} = \frac{(x-1)(x-2)\Gamma(x-2)}{x}$, pour $x > 2$.

- 9.a) En utilisant l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u > -1$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, n], 0 \leq e^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n} e^{-t}$
- 9.b) En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^n t^{x-1} \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$.
- 9.c) Montrer que $\Gamma(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n! n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$

III. Exercices avancés

Exercice 11 ★★

Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-xt}}{1 + t^2} dt$

Exercice 12 ★★

Soit $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \int_{2x}^{3x} e^{-t^2} dt$.

1. En notant, pour $x > 0$, $f : t \mapsto e^{-t^2}$ et F une primitive de f , exprimer $\varphi(x)$ à l'aide de $F(2x)$ et $F(3x)$.
2. En déduire que φ est dérivable sur \mathbb{R}_*^+ et calculer sa dérivée.

Exercice 13 ★★★★★

Soit $F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\text{sh } t}{t} dt$

1. Donner le domaine de définition D de F .
2. Etudier la dérivabilité de F sur D , et calculer $F'(x)$ pour $x \in D$.
3. Déterminer une expression de F .

Exercice 14 ★★★★★

Pour tout réel positif x , on pose :

$$f(x) = \left(\int_0^x e^{-t^2} dt \right)^2 \text{ et } g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2} dt$$

1. Montrer que f est définie et dérivable, et exprimer sa dérivée sous forme d'intégrale.
2. Montrer que g est définie et dérivable, et exprimer sa dérivée sous forme d'intégrale.

3. Montrer que : $\forall x \geq 0, f'(x) + g'(x) = 0$.
4. En déduire que : $\forall x \geq 0, f(x) + g(x) = \frac{\pi}{4}$.
5. Montrer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
6. Montrer que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ existe.
7. Conclure que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Exercice 15 ☆☆☆ Transformée de Laplace du sinus cardinal

$$\text{Soit } f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto \begin{cases} \frac{\sin t}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}.$$

1. Montrer que $I(A) = \int_0^A \frac{\sin t}{t} dt$ possède une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.
2. En remarquant que $|\sin t| \geq \sin^2 t = \frac{1}{2}(1 - \cos(2t))$, $\forall t \in \mathbb{R}$, montrer que f n'est pas intégrable sur \mathbb{R}^+ .
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto \int_0^{+\infty} f(t) e^{-xt} dt$.
Montrer que φ est définie et de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}_*^+ .
4. (a) Montrer que : $\forall x > 0$, $\varphi'(x) = \frac{-1}{1+x^2}$.
(b) Montrer que : $\forall x > 0$, $|\varphi(x)| \leq \frac{1}{x}$.
(c) En déduire que $\forall x > 0$, $|\varphi(x)| = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } x$

Exercice 16 ☆☆☆☆ Centrale

$$\text{Soit } f : x \mapsto \int_0^\pi \ln(1 - 2x \cos t + x^2) dt.$$

- 1) Donner l'ensemble de définition de f .
- 2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$,
 $a_k = \frac{k\pi}{n}$.
i) Montrer que :
 $(x+1) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (1 - 2x \cos a_k + x^2) = (x-1)(x^{2n} - 1)$.
ii) Calculer f à l'aide d'une somme de Riemann.
- 3) Calculer $f(1)$.

Notes

¹ correction :

⁶ correction :

Majorer !

¹¹ correction : TCD à paramètre continue, dominer par $\varphi(t) = \frac{2}{1+t^2}$ intégrable.

¹³ correction : $]1, +\infty[= D$

$$F'(x) = \int_0^{+\infty} -e^{-xt} \operatorname{sh} t dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+1)t} - e^{-(x-1)t}}{2} dt$$

$$F'(x) = \frac{-1}{2} \left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1} \right)$$

$$F(x) = \frac{-1}{2} \ln(x^2 - 1) + K, \text{ et } K = 0 \text{ car limite en } +\infty$$