Méthodes à retenir :

- Savoir dominer $|f(x,t)|$ indépendemment du paramètre externe x par une fonction $t \mapsto \varphi(t)$ intégrable.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆

On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t$.

Déterminer l'ensemble de définition de F.

Exercice 2 ☆☆

Montrer que la fonction $G : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 e^{xt}\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, et donner l'expression de sa dérivée.

Exercice 3 ☆☆

Pour $x \in \mathbb{R}_+^*$, posons $f_x :]0,1] \to \mathbb{R},\ \ln(1+t^x)$.

Soit $F : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \ln(1+t^x)\mathrm{d}t$

1. Montrer que $f_x(t) \underset{t\to 0}{\sim} t^x$.
2. En déduire que F est définie et continue sur $]0,+\infty[$.

II. Exercices

Exercice 4 ☆☆

Justifier que $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{e^t}\mathrm{d}t$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 5 ☆☆

On pose : $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2}\mathrm{d}t$.

Donner l'ensemble de définition D_F de F.

Montrer que F est continue sur D_F.

Déterminer $F(0)$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x)$.

Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,+\infty[$ et calculer $F'(x)$.

Donner une équation différentielle vérifiée par F.

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$.

Exercice 6 ☆☆

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une application continue et bornée sur $\mathbb{R}^+$. Montrer que

$F : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\ \mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}t$ est définie et tend vers 0 en $+\infty$.

Exercice 7 ☆☆☆ *Mines-Télecom*

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\cos xt}{t^2}\,\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie sur $\mathbb{R}$ et paire.
2. Montrer que $\forall u \in \mathbb{R},\ |\sin u| \leqslant |u|$.
3. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^1$.
4. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ et déterminer F''.
5. Déterminer la fonction F.

Exercice 8 ☆☆☆

Etudier la fonction $f : x \mapsto \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t+t^3}}$, puis tracer sa courbe représentative C_f.

On pourra montrer que pour tout $x > 0$,

$0 < f(x) \leq \dfrac{x}{\sqrt{x+x^3}}$.

Exercice 9 ☆☆☆

Soit $F : x \longmapsto \displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de F.
2. Avec le changement de variable $t = u^2$, calculer $F(1/2)$.
3. En déduire $F(3/2)$.

Exercice 10 ☆☆☆☆ *la fonction Gamma*

On considère la fonction

$\Gamma :]0,+\infty[,\ x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1}\ \mathrm{e}^{-t}\ \mathrm{d}t$

1) Justifier la définition ci-dessus, puis étudier sa continuité.

2) Calculer $\Gamma(1)$.

3) Montrer que pour tout $x > 0$,

$\Gamma(x+1) = x\ \Gamma(x) \quad (\star)$.

4) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\Gamma(n+1) = n!$

5) Montrer que Γ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et calculer $\Gamma^{(2)}$.

6) Montrer que Γ' est croissante sur $]0,+\infty[$.

7) A l'aide de $(\star)$, montrer que $\Gamma(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$.

8) Calculer la $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\Gamma(x)}{x}$.

On pourra remarquer que Γ est minorée par $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$, et que $\dfrac{\Gamma(x)}{x} = \dfrac{(x-1)(x-2)\Gamma(x-2)}{x}$, pour $x > 2$.

9.a) En utilisant l'inégalité $\ln(1+u) \leq u$ pour tout $u > -1$, montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall t \in [0, n]$,

$$0 \leq \ \mathrm{e}^{-t} - \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq \frac{t^2}{n}\ \mathrm{e}^{-t}$$

9.b) En déduire que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^n t^{x-1}\left(1-\frac{t}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t.$$

9.c) Montrer que $\Gamma(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{n!n^x}{x(x+1)\dots(x+n)}$

III. Exercices avancés

Exercice 11 ✩✩✩

Soit $n \in \mathbb{N}$; soit $J_n : x \longmapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(nt - x\sin t)\,\mathrm{d}t$.

1. Donner la parité de J_n en fonction de n.
2. Montrer que J_n est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R},\ J_n(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2p+n}$..
4. Déterminer $p_n \in \mathbb{R}_2[X]$ tel que J_n vérifie l'équation différentielle
   $x^2y'' + xy' + p_n(x)y = 0.$

Exercice 12 ✩✩

Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-xt}}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 13 ✩✩

Soit $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \to \mathbb{R},\ x \longmapsto \displaystyle\int_{2x}^{3x} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t.$

1. En notant, pour $x > 0$, $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ et F une primitive de f, exprimer $\varphi(x)$ à l'aide de $F(2x)$ et $F(3x)$.
2. En déduire que φ est dérivable sur $\mathbb{R}_*^+$ et calculer sa dérivée.

Exercice 14 ✩✩✩

Soit $F(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\ \frac{\operatorname{sh} t}{t}\ \mathrm{d}t$

1. Donner le domaine de définition D de F.
2. Etudier la dérivabilité de F sur D, et calculer $F'(x)$ pour $x \in D$.
3. Déterminer une expression de F.

Exercice 15 ✩✩✩

Pour tout réel positif x, on pose :

$f(x) = \left(\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t\right)^2$ et $g(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\mathrm{d}t$

1. Montrer que f est définie et dérivable, et exprimer sa dérivée sous forme d'intégrale.
2. Montrer que g est définie et dérivable, et exprimer sa dérivée sous forme d'intégrale.
3. Montrer que : $\forall x \geq 0,\ f'(x) + g'(x) = 0.$
4. En déduire que : $\forall x \geq 0,\ f(x) + g(x) = \dfrac{\pi}{4}.$
5. Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0.$
6. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$ existe.
7. Conclure que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Exercice 16 ☆☆☆ *Transformée de Laplace du sinus cardinal*

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ t \longmapsto \begin{cases} \dfrac{\sin t}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$.

1. Montrer que $I(A) = \displaystyle\int_0^A \frac{\sin t}{t}\, \mathrm{d}t$ possède une limite finie lorsque A tend vers $+\infty$.
2. En remarquant que $|\sin t| \geq \sin^2 t = \dfrac{1}{2}(1 - \cos(2t)),\ \forall t \in \mathbb{R}$, montrer que f n'est pas intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
3. Soit $\varphi : \mathbb{R}_*^+ \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\, \mathrm{e}^{-xt}\, \mathrm{d}t$. Montrer que φ est définie et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_*^+$.
4. (a) Montrer que : $\forall x > 0,\ \varphi'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$.
   (b) Montrer que : $\forall x > 0,\ |\varphi(x)| \leq \dfrac{1}{x}$.
   (c) En déduire que $\forall x > 0$, $|\varphi(x)| = \dfrac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan} x$

Exercice 17 ☆☆☆☆ *Centrale*

Soit $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \ln(1 - 2x\cos t + x^2)\, \mathrm{d}t$.

1) Donner l'ensemble de définition de f.

2) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on pose pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = \dfrac{k\pi}{n}$.

i) Montrer que :

$$(x+1) \cdot \prod_{k=0}^{n-1} (1 - 2x\cos a_k + x^2) = (x-1)(x^{2n} - 1).$$

ii) Calculer f à l'aide d'une somme de Riemann.

3) Calculer $f(1)$.

Notes

[1] correction :

[6] correction :

Majorer !

[12] correction : TCD à paramètre continue, dominer par $\varphi(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$ intégrable.

[14] correction : $]1, +\infty[= D$

$F'(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} -e^{-xt} \operatorname{sh} t \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-(x+1)t} - e^{-(x-1)t}}{2} \mathrm{d}t$

$F'(x) = \dfrac{-1}{2}\left(\dfrac{1}{x-1} + \dfrac{1}{x+1}\right)$

$F(x) = \dfrac{-1}{2}\ln(x^2-1) + K$, et $K = 0$ car limite en $+\infty$