

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆☆

Dans \mathbb{R}^3 pour la norme $\| \cdot \|$ euclidienne usuelle, dessiner la boule fermée de centre $\Omega(1, 1, 0)$ et de rayon 2.

Exercice 2

En remarquant que $\| \cdot \|_\infty : M \mapsto \max\{|M_{ij}|, i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket\}$ est une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, étant donnée une suite $(M_p)_p$ de matrices qui converge vers une limite M , comment peut-on quantifier cette limite, avec $\varepsilon > 0$?

Exercice 3 Normes Vectorielles

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Dans $E = \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on pose pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$:

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|, \|X\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |x_i|^2}, \|X\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|. \text{ On}$$

rappelle que $\| \cdot \|_1, \| \cdot \|_2$ et $\| \cdot \|_\infty$ sont des normes.

- Montrer que :
 $\forall X \in E, \|X\|_\infty \leq \|X\|_1 \leq n\|X\|_\infty$
- Montrer que :
 $\forall X \in E, \|X\|_\infty \leq \|X\|_2 \leq \sqrt{n}\|X\|_\infty$

Exercice 4

On se place dans l'espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ et on note d la distance associée.

Montrer que la boule $B(A, r) = \{M \in E; d(A, M) < r\}$ est une partie ouverte de E , pour $A \in E$ et $r > 0$.

Exercice 5

On se place dans l'espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$ et on note d la distance associée.

Montrer que la boule $B(A, r) = \{M \in E; d(A, M) < r\}$ est convexe pour $A \in E$ et $r > 0$.

II. Exercices

Exercice 6 ☆

Justifier que la suite $\left(\begin{pmatrix} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n & \frac{1}{n!} \\ e^{-n} & \cos(n) \end{pmatrix} \right)_n$ est bornée dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 7 ☆

Justifier que la fonction $f : (x, y) \mapsto \frac{1}{1 + \|(x, y)\|_2}$ est bornée sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 8 ☆

Démontrer que sur \mathbb{R}^2 , l'application N de \mathbb{R}^2 vers \mathbb{R} vérifiant :
 $\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, N(x) = \max(|x_1 + x_2|, |x_1|, |x_2|)$
est une norme, puis dessiner la boule fermée
 $B_f(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^2; N(x) \leq 1\}$.

Exercice 9 ☆☆

$$\text{Soit } M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{3} & \frac{5}{12} \\ \frac{1}{4} & \frac{5}{12} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- La suite de matrices $(M^n)_n$ converge t-elle?
- Soit $N = \lim_{n \rightarrow \infty} M^n$. Que représente N ?
- Déterminer N .
- Soit $(u_n)_n, (v_n)_n$ et $(w_n)_n$ trois suites réelles et $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$ telles que pour tout naturel n $X_{n+1} = MX_n$. La suite $(X_n)_n$ converge t-elle? Si oui, quelle est sa limite?

Exercice 10 ☆☆☆ Norme matricielle

On appelle trace d'une matrice carrée A d'ordre n le nombre noté $\text{tr}(A) = \sum_{i=1}^n a_{ii}$ égal à la valeur de la somme des coefficients diagonaux d'une matrice.

- Démontrer que l'application

$$(M, N) \mapsto \text{tr}(M^T \times N)$$

définie un produit scalaire sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

- En déduire que l'application

$$N : M \mapsto \sqrt{\text{tr}(M^T \times M)}$$

définie une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Exercice 11

Donner le domaine de continuité le plus grand possible de la fonction :

$$f : (x, y) \mapsto y\sqrt{1 - x^2}$$

Exercice 12

Étudier la continuité en $(0, 0)$ de la fonction

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

On pourra considérer $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, t)$ et $\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t, -t)$

Exercice 13

Étudier la continuité en (0,0) de la fonction $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$g(x, y) = \begin{cases} xy \cos\left(\frac{1}{xy}\right) & \text{si } x \neq 0 \text{ et } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \text{ ou } x = 0 \text{ ou } y = 0 \end{cases}$$

Exercice 14 ☆☆

III. Exercices avancés

Exercice 17 ☆☆

Justifier que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 > y^2\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Exercice 18 ☆☆

Justifier que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 = 1 + y\}$ est un fermé de \mathbb{R}^2 .

Exercice 19 ☆☆☆ Fermé

Justifier que $\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); \det(M) = 0\}$ est un fermé de \mathbb{R}^n .

Exercice 20

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$. On rappelle que :

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_0^1 f(t)^2 dt} \text{ et } \|f\|_\infty = \max_{t \in [0, 1]} |f(t)| \text{ sont des normes sur } E.$$

1. Montrer que pour tout $f \in E$, $\|f\|_2 \leq \|f\|_\infty$

2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $f_n : t \mapsto \begin{cases} 1 - nt & \text{si } t \in [0, 1/n] \\ 0 & \text{si } t > 1/n \end{cases}$
Montrer que $\|f_n\|_\infty = 1$ et $\|f_n\|_2 = \frac{1}{\sqrt{3n}}$

3. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et $\|\cdot\|_2$ sur $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ sont-elles équivalentes ?

Justifier que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 > y^2\}$ est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Exercice 15 ☆☆

Justifier que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 = 1 + y\}$ est un fermé de \mathbb{R}^2 .

Exercice 16 ☆☆☆ Fermé

Justifier que $\{M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}); \det(M) = 0\}$ est un fermé de \mathbb{R}^n .

Exercice 21 Normes en dimension infinie

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et $N; f \mapsto \int_0^1 e^x |f(x)| dx$

1. Montrer que N est une norme.

2. pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$f_n : x \mapsto \begin{cases} = 1 - nx & \text{si } 0 \leq x \leq \frac{1}{n} \\ = 0 & \text{si } \frac{1}{n} < x \end{cases}$$

(a) tracer les graphes de f_4 et f_{10} .

(b) Déterminer les suites $(N(f_n))_n$ et $(\|f_n\|_\infty)_n$.

(c) les normes N et $\|\cdot\|_\infty$ sont-elles équivalentes ?

Exercice 22 ☆☆☆

Dans \mathbb{R}^3 pour la norme $\|\cdot\|$ euclidienne usuelle, calculer la distance du point $A(1, -1, 1)$ au plan d'équation $x + z = 0$, à l'aide d'une projection orthogonale.

Exercice 23 ☆☆

Soient F une partie fermée non vide d'un espace normé E et $x \in E$.

On note $d(x, F) = \inf\{\|x - y\|, y \in F\}$

1. si $x \in F$, justifier que $d(x, F) = 0$

2. Supposons que $d(x, F) = 0$

(a) justifier l'existence d'une suite $(y_n) \in F^{\mathbb{N}}$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \|x - y_n\| \leq \frac{1}{n+1}$$

(b) Montrer que la suite y_n est convergente, vers une limite que l'on précisera.

(c) En utilisant le fait que F est une partie fermée, montrer que $x \in F$.

3. En déduire que

$$d(x, F) = 0 \Leftrightarrow x \in F$$

Exercice 24 ☆☆☆☆

On suppose que A est une partie convexe d'un espace vectoriel normé E .

1. (a) Soient $a \in \bar{A}$ et $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim a_n = a$, et $b \in \bar{A}$ et $(b_n) \in A^{\mathbb{N}}$ telle que $\lim b_n = b$

Montrer que pour tout scalaire $\lambda \in [0, 1]$, $\lambda a + (1 - \lambda)b \in \bar{A}$

(b) En déduire que \bar{A} est convexe.

2. (a) Soient $a, b \in A^\circ$, et $r_a, r_b > 0$ tels que $B(a, r_a) \subset A$ et $B(b, r_b) \subset A$.

En notant $r = \min(r_a, r_b)$, justifier que pour tout $x \in B(\lambda a + (1 - \lambda)b, r)$, il existe $u \in B(0, 1)$ tel que :

$$x = \lambda a + (1 - \lambda)b + ru$$

(b) En remarquant que $a' = a + ru \in A$ et que $b' = b + ru \in A$, justifier que le segment $[a', b'] = \{ta' + (1 - t)b'; t \in [0, 1]\}$ est contenu dans A .

(c) En déduire que $x \in A$

(d) En déduire que $B(\lambda a + (1 - \lambda)b, r) \subset A$

(e) La partie A° est-elle convexe?

Exercice 25 ☆☆ fonctions höldériennes

Soit $E = \mathbb{R}^n$ pour $n \in \mathbb{N}$, et $\| \cdot \|$ une norme sur E . Soit $h : E \rightarrow E$

telle qu'il existe $\alpha > 0$ vérifiant :

$\forall (x, y) \in E^2, \|h(x) - h(y)\| \leq \|x - y\|^\alpha$. Montrer que h est continue sur E .

Exercice 26 ☆☆☆

Soient E un \mathbb{R} -e. v. n., a et b deux vecteurs non nuls de E , et pour tout t réel, $f(t) = \|at + b\|$;

a) prouver que f est continue et lipschitzienne ;

b) prouver que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f = +\infty$ et $\lim_{t \rightarrow -\infty} f = +\infty$;

c) Prouver que l'ensemble des réels t tels que $at + b$ appartienne à la boule unité ouverte est soit vide soit un intervalle ouvert de \mathbb{R} .

Exercice 27 ☆☆☆, pour les 5/2 : CCINP PC 2018

On étudie

$$E = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \begin{pmatrix} 2 & y \\ x & 1 \end{pmatrix} \text{ est diagonalisable dans } \mathbb{R} \right\}.$$

1. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $(x, y) \in E$.

2. Montrer que E est un ouvert de \mathbb{R}^2 .

Notes

¹ correction : Utiliser la définition de boule fermée

³ correction :

⁵ correction :

⁸ correction : préciser les bords

¹³ correction : $x_n = y_n = \frac{1}{\sqrt{2n\pi}}$ donne $f(x_n, y_n) = 0$.

$x_n = y_n = \frac{1}{\sqrt{2(n\pi + \pi/2)}}$ donne $f(x_n, y_n) = 1$.