Table des matières

Pré-requis

Objectifs

I. Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

I.1 fonction génératrice

Définition 1 (fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$).

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice la fonction G_X définie par :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=n)\ t^n$$

Le rayon de convergence est au moins égal à 1.

Remarque 1. La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.

en effet, le r.c.v. est > 0 donc par unicité du DSE, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}[X=n] = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

Proposition 1.

G_X CVN sur $[-1,1]$, y est continue, et le rcv est ≥ 1.

Proposition 2.

La variable aléatoire X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, si tel est le cas, $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

Démonstration non exigible.

Proposition 3.

La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.
Si tel est le cas, $\boxed{G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)}$

Démonstration non exigible.

Remarque 2. On obtient les expressions de $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et de $G''_X(1)$ en cas d'existence :
$G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$, $G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$, d'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \sum_k (k-\mathbb{E}[X])^2\ \mathbf{P}(\{X=k\})$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2 = \boxed{G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}$$

Proposition 4.

Si X admet une variance, alors $\mathbb{V}[X] = \boxed{G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}$

Transfert et dérivations terme à terme successives des fonctions génératrices

Proposition 5.

La loi d'une v.a. X a valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.

Par unicité du DSE :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}[X = k] = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}.$$

Proposition 6.

Si X et Y sont deux v.a. **indépendantes**, alors $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$

dém : par indépendance de t^X et t^Y, $\mathbb{E}[t^{X+Y}] = \mathbb{E}[t^X]\mathbb{E}[t^Y]$

I.2 Loi géométrique

Définition 2.

On appelle loi géométrique de paramètre réel p la loi, notée $\mathcal{G}eom(p)$, définie pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(\{X = k\}) = (1-p)^{k-1}p$$

C'est la loi du premier succès dans une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p

Proposition 7.

Pour X de loi $\mathcal{G}(p)$, on a :
$\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p}$
$\mathbb{V}[X] = \dfrac{1-p}{p^2}$
$G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$

démonstration : La série $\sum_k k^2 p(1-p)^{k-1}$ converge, car son terme général est un $o(k^{-2})$.

$G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} t^k \; p(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{k=1}^{+\infty} ((1-p)t)^k = \frac{p}{1-p} \, \frac{(1-p)t}{1-(1-p)t} = \frac{pt}{1-(1-p)t}$

$G'_X(t) = \frac{p}{(1-(1-p)t)^2}$

$G''_X(t) = \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p)t)^3}$

Donc

$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = \frac{1}{p}$

$\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \frac{2(1-p)}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$ $\square$

I.3 Loi de Poisson

Définition 3.

On appelle loi de Poisson de paramètre réel λ la loi, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ définie pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ par :

$$\mathbf{P}(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$$

Proposition 8.

Pour X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, on a :

$\mathbb{E}[X] = \lambda$

$\mathbb{V}[X] = \lambda$

$G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

démonstration :

La série $\sum_k k^2 \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ converge, car son terme général est un $o(k^{-2})$.

$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \, \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} t^k \, \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$

$G'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$

$G''_X(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$

Donc

$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = \lambda$

$\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda$ $\square$

Remarque 3 (additivité de poissons indépendantes). Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ sont deux v.a. indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

en effet : $\mathrm{e}^{\lambda(t-1)} \mathrm{e}^{\mu(t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(t-1)}$, et la fonction génératrice caractérise la loi.

I.4 Loi Binomiale

Définition 4.

On appelle loi Binomiale de paramètres $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ réel, la loi notée $\boxed{\mathcal{B}(N,p)}$ définie pour $S \hookrightarrow \mathcal{B}(N,p)$ par :

$$\mathbf{P}(\{S=k\}) = \binom{N}{k}(1-p)^{N-k}p^k, \text{ pour tout } k \in [\![0,N]\!]$$

Proposition 9.

Pour S de loi $\mathcal{B}(N,p)$, on a :
$\mathbb{E}[S] = Np$
$\mathbb{V}[S] = Np(1-p)$
$G_S(s) = (1-p+ps)^N$

démonstration :

On calcule la somme finie $G_S(t) = \sum_{k=0}^{N} t^k \binom{N}{k}(1-p)^{N-k}p^k = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}(1-p)^{N-k}(pt)^k = (1-p+pt)^N$
$G'_S(t) = Np(1-p+pt)^{N-1}$
$G''_S(t) = Np((N-1)p)(1-p+pt)^{N-2}$ (pour $N \geq 2$)
Donc
$\mathbb{E}[S] = G'_S(1) = Np$
$\mathbb{V}[S] = G''_S(1) + G'_S(1) - (G'_S(1))^2 = N(N-1)p^2 + Np - N^2p^2 = Np - Np^1 = Np(1-p)$ $\square$

II. Inégalités asymptotiques

II.1 Introduction : répétition d'évènements indépendants

Exemple :
on répète une expérience incertaine sur une grande population de taille N_0, et on aimerait comprendre le phénomène « en moyenne. »

• **Pour le probabiliste**, il s'agit de déterminer un modèle aléatoire $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ et une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires indépendantes, représentant les différents résultats individuels.
Le comportement moyen d'un groupe de N variables est caractérisé par la variable aléatoire moyenne

$$S_N = \frac{X_1 + \ldots X_N}{N}$$

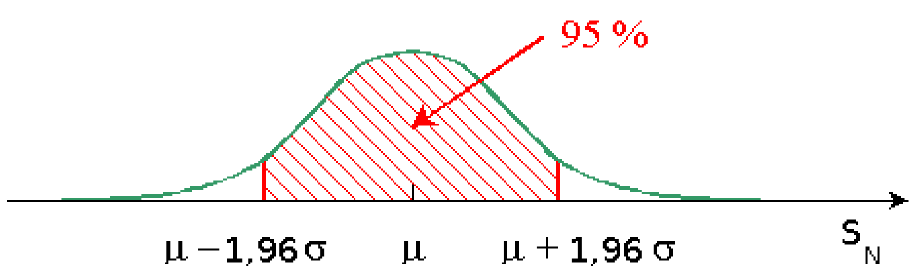
Il s'agit de comprendre les lois de S_N pour $N \in [\![1, N_0]\!]$.

• **Pour le statisticien**, on dispose d'un échantillon $(x_1, \ldots, x_N)$ correspondant à un sondage d'une partie de la population, et on aimerait tester son comportement moyen, à l'aide d'un modèle probabiliste, pour prédire l'état du système $(x_1, \ldots, x_{N_0})$
Pour cela, on s'appuie sur la moyenne observée $\hat{x} = \dfrac{x_1 + \ldots x_N}{N}$ sur l'échantillon sondé.

Réponse du programme de lycée :
Si les $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes de même loi usuelle,
admettant une « espérance »$\mu \in \mathbb{R}$ et une « variance » $\sigma^2 > 0$, alors lorsque $N \to +\infty$
$S_N = \dfrac{X_1 + \ldots X_N}{N}$ se comporte comme une variable gaussienne de densité $f_X : x \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\frac{-(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$
On a

$$\mathbf{P}\left(\left\{ |S_N - \mu| \leq 1,96 \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right\}\right) \leq 0,95$$

ce qui signifie qu'avec une probabilité supérieur à 95%, $\left| \dfrac{X_1 + \ldots X_N}{N} - \mu \right| \leq 1,96 \dfrac{\sigma}{\sqrt{N}}$



Interprétation : la moyenne empirique observée sur l'échantillon $\hat{x} = \dfrac{x_1 + \ldots x_N}{N}$ doit être souvent proche de l'espérance μ, et dans l'intervalle de cofiance $I_{0,95} = [\mu - 1,96\sigma, \mu + 1,96\sigma]$ dans 95% des observations.

II.2 Variables centrées réduites, sommes finies de v.a.i.i.d.

2.a) Variable centrée réduite

Proposition 10.

Soit X une v.a. telle que X^2 admet une espérance et telle que $\sigma(X) > 0$.
Alors $N = \dfrac{X - \mathbb{E}[X]}{\sigma(X)}$ est centrée et réduite, c'est à dire
$\mathbb{E}[N] = 0$ (N centrée)
et
$\sigma(N) = 1$ (N réduite)

2.b) Somme de v.a.i.i.d.

Proposition 11.

Soient $X_1, \dots X_n$ des v.a.i.i.d. telles que X_1 admet une espérance.
En notant $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$ et soit $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Alors $\mathbb{E}[S_n] = nm$ et $\mathbb{V}[S_n] = n\sigma^2$, de sorte que $N = \dfrac{S_n - nm}{\sigma\sqrt{n}}$ est centrée réduite.

II.3 Comportement asymptotique

3.a) Inégalité de Markov

Proposition 12 (Inégalité de Markov).

Soit X une variable aléatoire discrète, d'espérance finie.
Alors pour tout $t > 0$, on a $\boxed{\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq \dfrac{\mathbb{E}(|X|)}{t}}$

démonstration :
On note Y la v.a.r. définie pour tout $\omega \in \Omega$, on a $Y(\omega) = \begin{cases} t & \text{si } |X(\omega)| \geq t \\ 0 & \text{si } |X(\omega)| < t \end{cases}$
Ainsi Y est égale à t si $X \geq t$ et à 0 sinon, et se note $Y(\cdot) = t\,\mathbf{1}_{|X| \geq t}(\cdot)$.
On remarque que pour tout $\omega \in \Omega$, on a $\boxed{|X(\omega)| \geq Y(\omega)}$
(car si ω est tel que $|X(\omega)| \geq t$, alors $|X(\omega)| \geq = Y(\omega)$ et si ω est tel que $|X(\omega)| < t$, alors $|X(\omega)| \geq 0 = Y(\omega)$)
Y est à valeurs dans l'ensemble fini $\{0, 1\}$, donc admet une espérance.
$|X|$ admet une espérance, car la série $\sum |x_k| \mathbf{P}(\{X = x_k\})$ converge, puisque X admet une espérance.
D'après la croissance de l'espérance, on en déduit que :
$\boxed{\mathbb{E}(|X|) \geq \mathbb{E}(Y)}$
or $\mathbb{E}(Y) = 0 \times \mathbf{P}(\{Y = 0\}) + t \times \mathbf{P}(\{Y = t\}) = t \times \mathbf{P}(\{Y = t\}) = t \times \mathbf{P}(\{|X| \geq t\})$
d'où $\mathbb{E}(|X|) \geq t\mathbf{P}(|X| \geq t)$, puis on divise par $t > 0$. □

3.b) Inégalité de Bienaymé-Tchebychev

En corollaire de l'inégalité de Markov, on en déduit une seconde inégalité :

Corollaire 13 (inégalité de Markov pour X^2).

Soit X une variable aléatoire discrète, d'espérance et de variance finies.

Alors pour tout $t > 0$, on a $\mathbf{P}(|X| \geq t) \leq \dfrac{\mathbb{E}(X^2)}{t^2}$

démonstration : Markov appliqué à la v.a.r. X^2, en remarquant que $X^2 \geq t^2 \iff |X| \geq t$. □

Proposition 14 (Inégalité de Bienaymé-Tchebychev).

Soit X une variable aléatoire discrète, d'espérance et de variance finies.

Alors pour tout $\varepsilon > 0$, on a : $\boxed{\mathbf{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{\mathbb{V}(X)}{\varepsilon^2}}$

démonstration : 2ème inégalité de Markov appliqué à $(X - \mathbb{E}(X))$ □

Remarque 4. La variance (ou l'écart-type) mesure donc la variation par rapport à la moyenne.

3.c) Application : Loi des grands nombres

Théorème 15 (Loi faible des grands nombres).

si $(X_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires deux à deux indépendantes et de même loi admettant un moment d'ordre 2, alors, si $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$, $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma = \sigma(X_1)$, on a pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

démonstration : Conséquence de Bienaymé-Tchebychev pour $X = \dfrac{S_n}{n}$, variable d'espérance m et de variance $\dfrac{\sigma^2}{n}$, on a $\boxed{\mathbf{P}\left(\left|\frac{1}{n}S_n - m\right| \geqslant \varepsilon\right) \leq \dfrac{\frac{1}{n} \times \sigma^2}{\varepsilon^2}}$ □

Remarque 5. Intervalle de confiance à 95% pour $n = 1000$ tirages $0,95 = \dfrac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$, donc $\varepsilon = \sqrt{0.95} * \sigma * n$ c'est peu précis.

En pratique celui obtenu par le théorème de la limite centrale est meilleur.

Remarque 6. (HP) Méthode de Monte-Carlo : pour approcher $\displaystyle\int_0^1 f$, on calcule $\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} f(X_i)}{N}$ pour des X_i de loi uniforme sur $[0, 1]$...

II.4 Compléments

Proposition 16 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes telles que X^2 et Y^2 admet des espérance, alors $(\mathbb{E}(XY))^2 \leq \mathbb{E}(X^2)\ \mathbb{E}(Y^2)$.

Proposition 17 (Variance d'une somme).

Si $X_1, \ldots, X_n$ sont des v.a. discrètes admettant une variance, alors

$$\mathbb{V}(X_1 + \cdots + X_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + \sum_{i \neq j} (E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j))$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}(X_i) + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} (E(X_i X_j) - E(X_i)E(X_j))$$

démonstration : Calcul direct, par récurrence sur n. □

Nouveau Programme PC 2022 :

C - Espérance et variance

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe	
Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0,+\infty]$, définie par $$\mathrm{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x).$$	On adopte la convention $xP(X=x)=0$ lorsque $x=+\infty$ et $P(X=+\infty)=0$.
Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X.	X est d'espérance finie si la famille $\big(xP(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X. Variable centrée.
Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, relation : $$\mathrm{E}(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(X\geqslant n).$$	
Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Formule de transfert : $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas : $$\mathrm{E}\Big(f(X)\Big)=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$	On remarque que la formule s'applique aux couples, aux n-uplets de variables aléatoires.
Linéarité de l'espérance. Si $\lvert X\rvert\leqslant Y$ et $\mathrm{E}(Y)<+\infty$, alors X est d'espérance finie. Positivité, croissance de l'espérance. Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X=0)$ est presque sûr.	
Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et : $$\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	Extension au cas de n variables aléatoires.
b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance	
Si X^2 est d'espérance finie, X est d'espérance finie.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi et : $$\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$$	Cas d'égalité.
Variance, écart type.	Notations $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$. Variable réduite.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX+b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Covariance de deux variables aléatoires. Relation $\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes. Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.	

c) Fonctions génératrices

Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n.$$	La série entière définissant G_X est de rayon $\geqslant 1$ et converge normalement sur $[-1,1]$. Continuité de G_X. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.	
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = {G_X}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.
Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.