Table des matières

Pré-requis

Objectifs

I. Couple de variables aléatoires discrètes, indépendance

I.1 Couple

Définition 1 (Couple de variables aléatoires discrètes).

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, l'application **couple** notée (X, Y) définie par $(X, Y) : \omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$ est une variable aléatoire sur Ω, à valeurs dans $X(\Omega) \times Y(\Omega)$

Définition 2.

Etant donnnées X et Y sont deux variables aléatoires discrètes sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$, leur **loi conjointe** est la loi de la variable aléatoire (X, Y), définie par :

$$\forall x \in X(\Omega),\ y \in Y(\Omega),\ \mathbf{P}(\{(X, Y) = (x, y)\}) = \mathbf{P}(\{X = x\} \cap \{Y = y\})$$

Les lois $\mathbf{P}_X$ de X et $\mathbf{P}_Y$ de Y sont appelées les **lois marginales** de (X, Y).

exemple 1. En pratique, on fait un tableau à double entrée donnant les $\mathbf{P}(\{X = x_i\} \cap \{Y = y_j\})$:

$Y \setminus X$	x_0	x_1	x_2	$\mathbb{P}_X$
y_0	$1/16$	$2/16$	$3/16$	$6/16$
y_1	$1/16$	$7/16$	$2/16$	$10/16$
$\mathbb{P}_Y$	$2/16$	$9/16$	$5/16$	

Remarque 1. Attention : la données des marginales ne donne pas la loi du couple !
contre-exemple : (X, Y) suit la loi uniforme sur $\{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$
et (X', Y') donnée par $\mathbf{P}_{(X',Y')}(0, 0) = 1/8$, $\mathbf{P}_{(X',Y')}(1, 0) = 3/8$ $\mathbf{P}_{(X',Y')}(0, 1) = 3/8$, $\mathbf{P}_{(X',Y')}(1, 1) = 1/8$
ont les mêmes marginales, mais ne sont pas égales !!!
En revanche, $\mathbf{P}(Y = y) = \displaystyle\sum_{x \in X(\Omega)} \mathbf{P}(Y = y, X = x)$: la loi du couple donne les marginales.

Définition 3.

Soit $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbf{P}(\{X = x\}) > 0$.
On appelle **loi conditionnelle de Y sachant** $\{X = x\}$ la loi de probabilité définie pour les $y \in Y(\Omega)$ par $\mathbf{P}_{\{X=x\}}(\{Y = y\})$.

I.2 Indépendance de deux variables

Définition 4 (Variables indépendantes).

Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A \subset X(\Omega)$ et $B \subset Y(\Omega)$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.
Si tel est le cas, on note $\boxed{X \perp\!\!\!\perp Y}$ le fait que X et Y sont indépendantes.

Notation : $X \perp\!\!\!\perp Y$

Remarque 2. De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par : $P(X = x, Y = y) = P(X = x)P(Y = y)$.

Définition 5 (alternative).

Deux variables aléatoires X et Y discrètes définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ sont dites **indépendantes** si, pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$,

$$\mathbf{P}(\{X = x, Y = y\}) = \mathbf{P}(X = x) \times \mathbf{P}(Y = y).$$

Remarque 3. on note $\{X = x, Y = y\} = \{X = x\} \cap \{Y = y\}$

Proposition 1.

Soient X et Y sont deux variables aléatoires.
Si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.

I.3 Rappel : espérance d'un produit de v.a.r. indépendantes

Proposition 2.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant des espérances et telles que XY admet une espérance, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\,\mathbb{E}(Y)$.

Démonstration hors programme
idée : OK pour des variables aléatoires à espaces d'états finis, puis théorème de Fubini sur la loi du couple (X, Y).

Remarque : réciproque fausse pour $X = Y$ de loi $b(p)$ par exemple

II. Espérance, variance, corrélation et covariance

II.1 Espérance

Définition 6.

La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble fini ou dénombrable est dite d'**espérance finie** si la famille $(x\mathbf{P}(X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est sommable.
Si tel est la cas, on appelle **espérance** de X, notée $\mathbb{E}[X]$ la valeur réelle définie par : $\boxed{\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in X(\Omega} x\mathbf{P}(X = x)}$.

Remarque 4. Pour X à valeurs dans $\mathbb{R}^+$,
$\sum\limits_{n\geq 0} x_n \mathbf{P}(X=x_n)$ CV ssi $\sum\limits_{n\geq 0} |x_n|\mathbf{P}(X=x_n)$ ssi $(x\mathbf{P}(X=x))_{x\in X(\Omega)}$ sommable.

exemple 2. Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, alors par changement d'indice :
$\mathbb{E}[X] = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} \dfrac{k\lambda^{k-1}\lambda e^{-\lambda}}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum\limits_{\ell=0}^{+\infty} \dfrac{\lambda^\ell}{\ell!} = \lambda e^{-\lambda} e^{\lambda} = \boxed{\lambda}$.

exemple 3. Si $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$, alors par dérivation terme à terme sur $]-1,1[$:
$\mathbb{E}[X] = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} kp(1-p)^{k-1} = p\sum\limits_{k=1}^{+\infty} \left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(x^k\right)\right]_{x=1-p} = p\left[\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{x}{1-x}\right)\right]_{x=1-p} = p\left[\dfrac{1-x+x}{(1-x)^2}\right]_{x=1-p} = \dfrac{p}{p^2} = \boxed{\dfrac{1}{p}}$.

Théorème 3 (Théorème du transfert :).

si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n\in\mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geq 0} \mathbf{P}(X=x_n)\ f(x_n)$ converge absolument.

Dans ce cas, on a :

$$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X=x_n)\ f(x_n).$$

Démonstration hors programme, idée : pour une fonction indicatrice $f = \mathbf{1}_{[a,b]}$, la formule est vraie. Puis toute fonction f continue sur un segment est limite uniforme d'une combinaison linéaire de fonctions indicatrices...

Proposition 4 (Linéarité de l'espérance).

Pour tous X, Y variables aléatoires et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\ \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$$

Démonstration non exigible.

idée : immédiat pour des variables à espaces de valeurs finis, se généralise aux v.a. discrètes quelconques.

en notant $\{(\omega_k)_{1\leq k\leq K}\}$ un système complet d'évènements tel que $p_k = \mathbf{P}_{(X,Y)}(x_k, y_k) = \mathbf{P}(\{(X,Y)=(x_k,y_k)\})$ avec $X(\Omega) = \{x_k,\ 1\leq k\leq K\}$ de cardinal $N \leq K$ (non nécessairement 2 à 2 disjoints) et $Y(\Omega) = \{y_k,\ 1\leq k\leq K\}$ de cardinal $M \leq K$ (non nécessairement 2 à 2 disjoints),

$$\sum_{k=1}^{N} (\lambda x_k + y_k)p_k = \sum_{k=1}^{N} \lambda x_k p_k + \sum_{k=1}^{N} y_k p_k$$

idée cas général : On note $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} = ((x_i,y_j))_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ l'ensemble des valeurs possibles pour la variable aléatoire couple (X,Y), avec $X(\Omega) = \{x_i,\ i\in\mathbb{N}\}$ et $Y(\Omega) = \{y_j,\ j\in\mathbb{N}\}$, et on note $p_n = \mathbf{P}(\{(X,Y)=C_n\})$, pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Comme X est d'espérance finie, la série $\sum\limits_{i} x_i \mathbf{P}(\{X=x_i\})$ converge absolument, et sa somme vaut, en utilisant les lois marginales, et le théorème de transfert pour $f : (x,y) \longmapsto x$:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \mathbf{P}(\{X = x_i\}) = \sum_{i=0}^{+\infty} x_i \sum_{j=0}^{+\infty} \mathbf{P}(\{(X,Y) = (x_i, y_j)\}) = \sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} f((x_i, y_j))\mathbf{P}(\{(X,Y) = (x_i, y_j)\})$$

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} f(C_n)\ \mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n)\})$$

De même pour $g : (x, y) \longmapsto y$: $\mathbb{E}[Y] = \sum_{n=0}^{+\infty} g(C_n)\ \mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n)\})$

Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\lambda f(C_n) + g(C_n)| \leq |\lambda|\ |f(C_n)| + |g(C_n)|$,
la série $\sum \lambda(f(C_n) + g(C_n))\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n)\})$ est absolument convergente et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(f(C_n) + g(C_n))\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n)\}) = \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda f(C_n)\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n)\}) + \sum_{n=0}^{+\infty} g(C_n)\mathbf{P}(\{(X,Y) = C_n)\})$$

Donc d'après le théorème de transfert $\lambda X + Y = \lambda f((X,Y)) + g((X,Y))$ admet une espérance et :

$$\mathbb{E}(\lambda X + Y) = \lambda\ \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) \quad \square$$

Proposition 5.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant des espérances et telles que XY admet une espérance, alors $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\ \mathbb{E}(Y)$.

Démonstration hors programme
idée : OK pour des variables aléatoires à espaces d'états finis, puis théorème de Fubini sur la loi du couple (X, Y).

Remarque : réciproque fausse pour $X = Y$ de loi $b(p)$ par exemple

II.2 Variance

Proposition 6.

Soit X v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si la variable aléatoire X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie.
i.e. : Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe, alors $\mathbb{E}[X]$ existe.

idée Démonstration :

$$\sum_{n=0}^{N} x_n p_n = \sum_{n=0}^{N} x_n \sqrt{p_n} \times \sqrt{p_n} \underset{C.-S.}{\leq} \sqrt{\sum_{n=0}^{N} x_n^2 \sqrt{p_n}^2}\sqrt{\sum_{n=0}^{N} \sqrt{p_n}^2} \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} x_n^2 p_n} \ \square$$

marche encore si X discrète quelconque...

Proposition 7.

Soit X v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$. Si $\mathbb{E}[X^2]$ existe, alors $m = \mathbb{E}[X]$ existe et $\mathbb{E}[(X - m)^2]$.
De plus $\mathbb{E}[(X - m)^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$

Démonstration : $(X-m)^2 = X^2 - 2mX + m^2$.

$\mathbb{E}[m^2] = \sum_{n=0}^{+\infty} m^2 p_n = m^2$ existe par transfert via $f : x \longmapsto m^2 x^0$ ou via v.a.r. constante.

DOnc par linéarité $\mathbb{E}[(X-m)^2] = \mathbb{E}[X^2] - 2m\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[m^2] = \mathbb{E}[X^2] - m^2$. $\square$ (formule de Koenig).

Définition 7.

Si X^2 est d'espérance finie, la **variance** de X est le réel $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$.

Proposition 8.

Soit X v.a. à valeurs discrète admettant une variance et une espérance. Alors $\boxed{\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2}$

idée Démonstration : linéarité

$\mathbb{E}\left((X-\mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left(X^2 - 2\mathbb{E}(X)X + (\mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(\mathbb{E}(X)^2)$ $\square$

Proposition 9.

Pour a et b réels et X une variable aléatoire réelle, on a $\boxed{\mathbb{V}(aX+b) = a^2\,\mathbb{V}(X)}$

démonstration : Calcul direct :

$\mathbb{E}(aX+b) = a\,\mathbb{E}(X) + b$, donc $\mathbb{E}((aX+b-\mathbb{E}(aX+b))^2) = \mathbb{E}((a(X-\mathbb{E}(X)))^2) = a^2\mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))^2)$. $\square$

exemple 4. Pour $S_N = \sum_{k=1}^{N} X_k$ de loi $\mathcal{B}(N,p)$, somme de variables de loi $b(p)$ indépendantes,

$$\mathbb{V}(S_N) = \sum_{k=1}^{N} \mathbb{V}(X_k) = Np(1-p)$$

exemple 5. Pour S_N de loi $\mathcal{B}(N,p)$, $\mathbb{V}\left(\frac{1}{N}S_N\right) = \frac{1}{N^2}\mathbb{V}(S_N) = \frac{p(1-p)}{N}$

Proposition 10.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes admettant des variances, alors
$\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y) + 2\mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))\right]$.

Démonstration : $((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)))^2 = (X-\mathbb{E}(X))^2 + 2(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y)) + (Y-\mathbb{E}(Y))^2$

II.3 Covariance, corrélation

Définition 8 (Covariance)**.**

$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}((X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

En cas d'indépendance, la covariance est nulle.

Proposition 11.

Si X et Y sont deux variables aléatoires discrètes indépendantes admettant des variances, alors $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$.

Démonstration

Définition 9 (coefficient de corrélation)**.**

$$\rho(X,Y) = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\ \mathbb{V}(Y)}}$$

Remarque 5. En cas d'indépendance, la corrélation vaut 0.
En cas de ralation $Y = aX + b$, la corrélation vaut 1 ou -1.

Définition 10.

Écart type $\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}(X)}$.

Proposition 12 (Cauchy-Schwarz)**.**

Soient X, Y deux variables aléatoires discrètes à valeurs réelles.

$$\mathrm{Cov}(X,Y) \leq \sqrt{\mathbb{V}(X)\ \mathbb{V}(Y)}$$

$$-1 \leqslant \rho(X,Y) \leqslant 1$$

démonstration : (Inégalité de Cauchy-Schwarz) $\mathbb{V}(tX+Y) = t^2\mathbb{V}(X) + 2t\mathrm{Cov}(X,Y) + \mathbb{V}(Y)$, trinôme dont le discriminant ne change pas de signe.

Dans le cas de variables à valeurs dans un ensemble fini, il y a égalité ssi $X - \mathbb{E}(X)$ et $Y - \mathbb{E}(Y)$ sont colinéaires, i.e. ssi $\exists\ a;\ a(X-\mathbb{E}(X)) = Y - \mathbb{E}(Y)$ ssi $\exists\ a, b;\ aX + b = Y$ $\square$

Remarque 6. Régression linéaire : si $|\rho| = 1$, alors égalité dans Cauchy-Schwarz : $(X - \mathbb{E}(X))$ et $(Y - \mathbb{E}(Y))$ sont colinéaires, donc il existe a, b tels que $Y = aX + b$.

Sinon, on pose $\Xi = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_N \end{pmatrix}$ et $\Gamma = \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_N \end{pmatrix}$

on cherche $\hat{a}, \hat{b}$ tels que $\left\|\Gamma - \hat{a}\Xi + \hat{b}(1 \dots 1)\right\|_2^2 = \left\|M \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - \Gamma\right\|_2^2$ soit minimale, avec $M = \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_N \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

OK pour $\hat{V} = \begin{pmatrix} \hat{a} \\ \hat{b} \end{pmatrix}$le projeté de Γ sur $\mathrm{Im}(M)$.

III. Suites de variables aléatoires

III.1 Indépendance de deux variables aléatoires

III.2 Indépendance d'une famille de variables

Définition 11 (Variables mutuellement indépendantes)**.**

Des variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ sont dites **mutuellement indépendantes** si :

$$\forall (x_1, \dots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} X_i(\Omega),\ \mathbf{P}((X_i)_{1 \le i \le n} = (x_i)_{1 \le i \le n}) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i = x_i)$$

Définition 12 (Suite de variables aléatoires indépendantes)**.**

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires.
On dit que les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **(mutuellement) indépendantes** si
pour toute partie I finie de $\mathbb{N}$, les $(X_i)_{i \in I}$ sont mutuellement indépendantes.

Définition 13 (Suite de variables aléatoires indépendantes)**.**

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires.
On dit que les $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont **deux à deux indépendantes** si
$\forall i \neq j$, X_i et X_j sont indépendantes.

exemple 6. Application à la modélisation d'un jeu de pile ou face infini par une suite de variables aléatoires de Bernoulli mutuellement indépendantes.

On note $N \in \mathbb{N}^*$, $p \in]0, 1[$, et $X_1, \dots, X_N$ des variables aléatoires indépendantes suivant la loi $b(p)$.

Alors $S_N = \displaystyle\sum_{i=1}^{N} X_i$ suit la loi $\mathcal{B}(N, p)$.

En effet, S_N est à valeurs dans $[\![0, N]\!]$, et pour tout $k \in [\![0, N]\!]$ on a :

$$\mathbf{P}(\{S_N = k\}) = \mathbf{P}(\{\sum_{i=1}^{N} X_i = k\}) = \mathbf{P}(\bigcup_{(\varepsilon_i) \in \{0,1\},\ \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i = k} \{(X_1, \dots, X_N) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)\}) \underset{evnmts\ incompatibles}{=}$$

$$\sum_{(\varepsilon_i) \in \{0,1\},\ \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i = k} \mathbf{P}(\{(X_1, \dots, X_N) = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N)\}) \underset{indep.}{=} \sum_{(\varepsilon_i) \in \{0,1\},\ \sum_{i=1}^{N} \varepsilon_i = k} p^k (1-p)^{N-k} = \binom{N}{k} p^k (1-p)^{N-k}$$

exemple 7. Attention : l'indépendance mutuelle implique l'indépendance 2 à 2, mais la réciproque est fausse !

Contre-exemple : X et Y indépendantes de loi $b(1/2)$, $Z = (2X-1)(2Y-1)$.

$\mathbf{P}(Z=1) = \mathbf{P}(X=1, Y=1) + \mathbf{P}(X=0, Y=0) = 1/2$ $\mathbf{P}(Z=-1) = \mathbf{P}(X=0, Y=1) + \mathbf{P}(X=1, Y=0) = 1/2$

$\mathbf{P}(Z=1, X=0) = \mathbf{P}(X=0, Y=0) = 1/4 = \mathbf{P}(Z=1)\mathbf{P}(X=0)$, $\mathbf{P}(Z=1, X=1) = \mathbf{P}(X=1, Y=1) = 1/4 = \mathbf{P}(Z=1)\mathbf{P}(X=1)$ d'où l'indépendance 2 à 2.

En revanche, $\mathbf{P}(Z=1, X=0, Y=1) = 0 \neq \mathbf{P}(Z=1)\mathbf{P}(X=0)\mathbf{P}(Y=1)$

Définition 14 (Variables i.i.d.)**.**

Une suite de variables aléatoires (x_n) est constituée de variables indépendantes identiquement distribuées si :
- les X_n sont (mutuellement) indépendantes
- Les $X_n,\ n \in \mathbb{N}$ ont toutes la même loi de probabilité.

exemple 8. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.

III.3 Coalitions

Proposition 13 (lemme des coalitions)**.**

si les variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1, \ldots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \ldots, X_n)$ le sont aussi.

Extension au cas de plus de deux coalitions.

NOUVEAU Programme PC 2022 :

III.4 Variables aléatoires discrètes(suit)

Contenus	Capacités & commentaires
d) Loi d'une variable aléatoire discrète	
Couple de variables aléatoires discrètes.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x, Y=y)$.
Loi conjointe, lois marginales. Loi conditionnelle de Y sachant un événement A.	Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
e) Événements indépendants	
Indépendance de deux événements.	Si $P(B)>0$, l'indépendance de A et B équivaut à $$P(A\|B)=P(A).$$
Indépendance d'une famille finie d'événements.	L'indépendance deux à deux n'entraîne pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.
f) Variables aléatoires indépendantes	
Deux variables aléatoires discrètes X et Y définies sur Ω sont indépendantes si, pour tout $A\subset X(\Omega)$ et $B\subset Y(\Omega)$, les événements $(X\in A)$ et $(Y\in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp\!\!\!\perp Y$. De façon équivalente, la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par $$P(X=x,Y=y)=P(X=x)P(Y=y).$$ Extension au cas de n variables aléatoires.
Suites de variables aléatoires indépendantes, suites i.i.d.	On ne soulève aucune difficulté quant à l'existence d'un espace probabilisé portant une suite i.i.d. Modélisation du jeu de pile ou face infini : suite i.i.d. de variables de Bernoulli.
Fonctions de variables indépendantes : si $X \perp\!\!\!\perp Y$, alors $f(X) \perp\!\!\!\perp g(Y)$.	Extension au cas de plus de deux variables aléatoires.
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1,\dots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\dots,X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

Programme PC :

Probabilités

Les chapitres de probabilités permettent de développer les compétences suivantes :
— *modéliser des situations aléatoires par le choix d'un espace probabilisé ou de variables aléatoires adéquats ;*
— *maîtriser un formalisme spécifique aux probabilités.*

4.a) A- Espaces probabilisés

Cette partie a pour objectif la mise en place du cadre général de la théorie des probabilités permettant d'aborder l'étude de processus stochastiques à temps discret. Cette mise en place se veut minimale. En particulier :
— *la notion de tribu ne doit donner lieu à aucun développement théorique autre que sa définition ;*
— *la construction d'espaces probabilisés n'est pas un objectif du programme.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Ensembles dénombrables	
Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Ensembles finis ou dénombrables. Dénombrabilité de $\mathbb{Z}$, d'un produit cartésien de deux ensembles dénombrables.	Un ensemble fini ou dénombrable peut être décrit en extension sous la forme $\{x_n\,;\ n \in \mathbb{N}\}$. Toute autre connaissance sur la dénombrabilité est hors programme.
b) Espace probabilisé	
Si Ω est un ensemble, on appelle *tribu* sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que : 1. $\Omega \in \mathcal{A}$, 2. pour tout $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$, 3. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la réunion $\displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$. Si Ω est un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, on appelle *probabilité* sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $\mathbf{P}\colon \mathcal{A} \to [0, 1]$ telle que : 1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$, 2. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements incompatibles, $$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$ On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ est une tribu et $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.	L'ensemble Ω est l'univers ; il n'est en général pas précisé. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les événements. Les étudiants doivent savoir expliciter un événement à partir d'autres événements en utilisant la réunion, l'intersection et le complémentaire. On fait le parallèle entre le vocabulaire probabiliste et le vocabulaire ensembliste.

Contenus	Capacités & Commentaires
Propriétés : — $\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$. — Continuité croissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_n \subset A_{n+1}$, alors : $$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$ — Continuité décroissante : si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_{n+1} \subset A_n$, alors : $$\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$ — Sous additivité : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors : $$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$	

c) Conditionnement et indépendance

Si A et B sont deux événements tels que $\mathbf{P}(B) > 0$, on appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le réel $$P_B(A) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$	Notation $\mathbf{P}_B(A) = P(A \mid B)$. L'application $\mathbf{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Ce paragraphe étend rapidement les concepts et résultats vus en première année dans le cadre des univers finis.
Formule des probabilités composées. Système complet dénombrable d'événements. Formule des probabilités totales : si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors la série $\sum P(B\cap A_n)$ converge et $$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B \mid A_n)\ P(A_n)$$	On adopte la convention $\mathbf{P}(B \mid A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $\mathbf{P}(A_n) = 0$. La formule reste valable dans le cas d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = 1$.
Formule de Bayes.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Indépendance de deux événements.	Si $\mathbf{P}(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $\mathbf{P}(A \mid B) = P(A)$.
Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.	L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance mutuelle si $n \geqslant 3$.

d') Généralités (sur les variables aléatoires)

Une variable aléatoire discrète X sur $(\Omega, \mathcal{A})$ est une application définie sur Ω dont l'image est finie ou dénombrable et telle que l'image réciproque de tout élément de $X(\Omega)$ appartient à $\mathcal{A}$.	Pour tout $U \subset X(\Omega)$, $X^{-1}(U)$ est un événement.
Notations $(X \in U)$, $\{X \in U\}$.	
Loi d'une variable aléatoire discrète.	
Si X prend ses valeurs dans $\{\, x_n \,;\, n \geqslant 0 \,\}$, les x_n étant distincts, et si $(p_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite de réels positifs vérifiant $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$, alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que $P(X = x_n) = p_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.	Démonstration hors programme.

d) Lois usuelles

Pour p dans $]0,1[$, loi géométrique de paramètre p : la variable aléatoire X suit une loi géométrique de paramètre p si et seulement si $$\forall k \in \mathbb{N}^*, \qquad P(X = k) = p(1-p)^{k-1}.$$	Notation $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$. La loi géométrique peut être interprétée comme rang du premier succès dans une suite illimitée d'épreuves de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p.
Série génératrice, espérance et variance.	
Loi de Poisson de paramètre λ.	
$\leftrightarrows$ PC : compteur Geiger.	

b) Espérance et variance

La variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble dénombrable $\{x_n \,;\, n \geqslant 0\}$ est dite d'espérance finie si la série $\sum x_n P(X = x_n)$ est absolument convergente ; si tel est le cas, on appelle espérance de X, noté $\mathbb{E}(X)$, le réel $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$.	On admet que la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x_n P(X = x_n)$ ne dépend pas de l'ordre d'énumération. $\leftrightarrows$ PC : énergie moyenne de systèmes à spectre discret.
Si X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, alors $\mathbb{E}(X) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} P(X \geqslant n)$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Théorème du transfert : si X est une variable aléatoire et f une application à valeurs réelles définie sur l'image $\{x_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ de X, alors $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la série $\Sigma P(X = x_n)\ f(x_n)$ converge absolument. Dans ce cas, on a : $$\mathbb{E}(f(X)) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = x_n)\ f(x_n).$$	Démonstration hors programme.