Méthodes à retenir :

- tracer dans un tableau double entrée la loi du couple et les marginales. En cas d'indépendance, il suffit de faire el produit des marginales.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆

On considère le couple (X, Y) de variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}$, dont la loi est donnée par :
$\mathbf{P}((0,0)) = 1/8$, $\mathbf{P}((0,1)) = 1/4$,
$\mathbf{P}((1,0)) = 3/8$, $\mathbf{P}((1,1)) = 1/4$.

1. Déterminer les lois marginales $\mathbf{P}_X$ et $\mathbf{P}_Y$, à l'aide d'un tableau.
2. X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 2 ☆☆

Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Bernoulli $b(1/2)$. Les variables aléatoires $X + Y$ et $X - Y$ sont-elles indépendantes ?

Exercice 3 ☆☆

Démontrer que si $X, Y et Z$ sont trois variables aléatoires mutuellement indépendantes, alors les variables aléatoires $X + Y$ et Z sont indépendantes, en utilisant le lemme des coalitions.

II. Exercices

Exercice 4 ☆☆☆

Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.
On suppose que la loi conjointe de X et Y vérifie

$$\mathbf{P}(X = j, Y = k) = \frac{a}{2^{j+1}\ k!} \text{ avec } a \in \mathbb{R}$$

a) Déterminer la valeur de a.
b) Reconnaître les lois marginales de X et Y.
c) Les variables X et Y sont elles indépendantes ?

Exercice 5 ☆☆☆ *Pièce*

On lance une pièce équilibrée plusieurs fois de suite. X est le rang pour lequel on obtient pour la 2ème fois « Pile ». On tire alors une boule dans une urne contenant $X - 1$ boules numérotées de 1 à $X - 1$ et on note Y le numéro de la boule tirée.

1. Montrer que X admet une variance et une espérance.
2. Déterminer la loi de Y à partir de la loi de Y sachant $\{X = k\}$.
3. Montrer que Y admet une variance et une espérance.
4. X et Y sont-elles indépendantes ?
5. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire de X et Y.

III. Exercices avancés

Exercice 6 ☆☆☆

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^2$ dont la loi est donnée par :

$$\forall (j,k)\in\mathbb{N}^2,\ P\left((X,Y)=(j,k)\right)=\frac{(j+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

1. Déterminer les lois marginales de X et de Y.
   Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Prouver que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et la calculer.

Exercice 7 ☆☆☆

Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que, pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p\in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i\in[\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k\in\mathbb{N}$, $P(Y=k|X=i)$.
   (b) Prouver que $Z=X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\dbinom{n-i}{k-i}\dbinom{n}{i}=\dbinom{k}{i}\dbinom{n}{k}$.
   (c) Déterminer l'espérance et la variance de Z.

Exercice 8 ☆☆☆

Soit $N\in\mathbb{N}^*$.
Soit $p\in]0,1[$. On pose $q=1-p$.
On considère N variables aléatoires $X_1,X_2,\cdots,X_N$ définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},P)$, mutuellement indépendantes et de même loi géométrique de paramètre p.

1. Soit $i\in[\![1,N]\!]$. Soit $n\in\mathbb{N}^*$.
   Déterminer $P(X_i\leqslant n)$, puis $P(X_i>n)$.
2. On considère la variable aléatoire Y définie par $Y=\min\limits_{1\leqslant i\leqslant N}(X_i)$
   c'est-à-dire $\forall\omega\in\Omega,\ Y(\omega)=\min\left(X_1(\omega),\cdots,X_N(\omega)\right)$, $\min$ désignant ń le plus petit élément de ż.
   (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Calculer $P(Y>n)$.
   En déduire $P(Y\leqslant n)$, puis $P(Y=n)$.
   (b) Reconnaître la loi de Y. En déduire $E(Y)$.

Exercice 9 ☆☆☆

On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k.

On choisit au hasard une boîte puis une boule dans cette boîte.

Soit X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X,Y).
2. Calculer $\mathbf{P}(X=Y)$.
3. X et Y sont-elles indépendantes ?

Notes

[1] correction :

$\mathbf{P}_X(0) = 1/8 + 2/8 = 3/8$, $\mathbf{P}_X(1) = 3/8 + 2/8 = 5/8$, $\mathbf{P}_Y(0) = 1/8 + 3/8 = 1/2$, $\mathbf{P}_Y(1) = 2/8 + 2/8 = 1/2$

Non, X et Y ne sont pas indépendantes car $\mathbf{P}((0,0)) = 1/8 \neq 3/8 * 1/2 = 3/16$

[2] correction : Non : X et Y suivent des lois de Bernoulli 1/2 $\mathbf{P}(\{X+Y=2\} \cap \{X-Y=0\} \neq \mathbf{P}(\{X+Y=2\})\mathbf{P}(\{X-Y=0\})$.

[5] correction :

1. Pour $k \geq 2$: $P[X=k] = (k-1)2^{-k}$: choix du pile parmi les $(k-1)$ premiers lancers.
   $E[X] = \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)2^{-k} = \frac{1}{k}\frac{2}{(1-1/2)^3} = 4$
   La série $\sum_{k\geq 2} k^2(k-1)2^{-k}$ CV et $E[X^2] = \sum_{k=2}^{+\infty} k^2(k-1)2^{-k} = \sum_{k=3}^{+\infty} k(k-1)(k-2)2^{-k} + 2\sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)2^{-k} = \frac{1}{2^3}\frac{3!}{(1-1/2)^4} + 2\frac{1}{2^2}\frac{2!}{(1-1/2)^3} = 20$
   $V(X) = 20 - 4^2 = 4$.
2. sachant $\{X=k\}$, Y prend les valeurs $1\dots,k-1$, donc$Y$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$.
   Pour $n \geq 1$, on a $P[Y=n] = \sum_{k=2}^{+\infty} P[X=k] \times P_{X=k}[Y=n] = \sum_{k=2}^{+\infty}(k-1)2^{-k} \times \frac{1}{k-1} = \frac{1}{2^{n+1}} \times 11 - 1/2 = (1-p)^{n-1}p$ pour $p = 1/2$
   Donc (loi géométrique) $E[Y] = 2$, $V[Y] = 2$
3. Non $P[(X=2) \cap (Y=3)] = 0$: pas d'indépendance !
4. $E[XY] = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=1}^{+\infty} knP[(X,Y) = (k,n)] = \sum_{k=2}^{+\infty}\sum_{n=1}^{k-1} kn(k-1)\frac{1}{2^k}\frac{1}{k-1} = \sum_{k=2}^{+\infty}\frac{k}{2^k}\frac{k(k-1)}{2} = \frac{1}{2}E[X^2] = 10$
   $cov(X,Y) = E[XY] - E[X]E[Y] = 10 - 4*2 = 2$
   $\rho(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{V[X]V[Y]}} = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

[6] correction :

On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

1. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
   Soit $k \in \mathbb{N}$.
   $P(Y=k) = \sum_{j=0}^{+\infty} P\left((X,Y) = (j,k)\right) = \sum_{j=0}^{+\infty}\frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\ j!\ k!}$.
   Or, $\sum_{j\geqslant 0}\frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\ j!\ k!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\ k!}\sum_{j\geqslant 1}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!}$ donc $\sum_{j\geqslant 0}\frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\ j!\ k!}$ converge et

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\ j!\ k!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\ k!}\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\ k!}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}} \quad (*). \tag{$\star$}$$

   De même, $\sum_{j\geqslant 0}\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\ j!\ k!} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\ k!}\sum_{j\geqslant 0}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!}$ donc $\sum_{j\geqslant 0}\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\ j!\ k!}$ converge et

$$\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\ j!\ k!} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\ k!}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\ k!}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}} \quad (**). \tag{$\star\star$}$$

Donc, d'après (*) et (**), on en déduit que :
$P(Y=k)=\dfrac{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}+\dfrac{k\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}=\dfrac{(\frac{1}{2}+k)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}$.
Pour des raisons de symétrie, X et Y ont la même loi et donc :
$X(\Omega)=\mathbb{N}$ et $\forall j\in\mathbb{N},\ P(X=j)=\dfrac{(\frac{1}{2}+j)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{j}}{j!\sqrt{\mathrm{e}}}$.

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car :
$P((X,Y)=(0,0))=0$ et $P(X=0)P(Y=0)\neq 0$.

2. Posons $\forall(j,k)\in\mathbb{N}^2,\ a_{j,k}=2^{j+k}P\left((X,Y)=(j,k)\right)$.
   On a $a_{j,k}=\dfrac{j+k}{\mathrm{e}\,j!\,k!}=\dfrac{j}{\mathrm{e}\,j!\,k!}+\dfrac{k}{\mathrm{e}\,j!\,k!}$.
   $\forall k\in\mathbb{N},\ \sum\limits_{j\geqslant 0}\dfrac{j}{\mathrm{e}\,j!\,k!}=\dfrac{1}{\mathrm{e}k!}\sum\limits_{j\geqslant 1}\dfrac{1}{(j-1)!}$ converge et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\dfrac{j}{\mathrm{e}\,j!\,k!}=\dfrac{1}{\mathrm{e}k!}\sum\limits_{j=1}^{+\infty}\dfrac{1}{(j-1)!}=\dfrac{1}{k!}$.
   De même, $\sum\limits_{j\geqslant 0}\dfrac{k}{\mathrm{e}\,j!\,k!}=\dfrac{k}{\mathrm{e}\,k!}\sum\limits_{j\geqslant 0}\dfrac{1}{j!}$ converge et $\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\dfrac{k}{\mathrm{e}\,j!\,k!}=\dfrac{k}{\mathrm{e}\,k!}\sum\limits_{j=0}^{+\infty}\dfrac{1}{j!}=\dfrac{k}{k!}$.
   Ensuite, $\sum\limits_{k\geqslant 0}\dfrac{1}{k!}$ et $\sum\limits_{k\geqslant 0}\dfrac{k}{k!}=\sum\limits_{k\geqslant 1}\dfrac{1}{(k-1)!}$ convergent. De plus $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{1}{k!}=\mathrm{e}$ et $\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\dfrac{k}{k!}=\mathrm{e}$.
   Donc la famille $(a_{j,k})_{(j,k)\in\mathbb{N}^2}$ est sommable.
   On en déduit que $E\left[2^{X+Y}\right]$ existe et $E\left[2^{X+Y}\right]=2\mathrm{e}$.

7 correction :

1. L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée n fois et ces n épreuves sont mutuellement indépendantes.
   De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité p (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1-p$ (échec).
   La variable X considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binômiale de paramètres (n,p).
   C'est-à-dire $X(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $\forall k\in[\![0,n]\!]\ P(X=k)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

2. (a) Soit $i\in[\![0,n]\!]$. Sous la condition $(X=i)$, la secrétaire rappelle $n-i$ correspondants lors de la seconde série d'appels et donc :

$$P(Y=k|X=i)=\begin{cases}\dbinom{n-i}{k}p^k(1-p)^{n-i-k} & \text{si } k\in[\![0,n-i]\!]\\ 0 \text{ sinon}\end{cases}$$

   (b) $Z(\Omega)=[\![0,n]\!]$ et $\forall k\in[\![0,n]\!]\ P(Z=k)=\sum\limits_{i=0}^{k}P(X=i\cap Y=k-i)=\sum\limits_{i=0}^{k}P(Y=k-i|X=i)P(X=i)$.

   Soit $k\in[\![0,n]\!]$. D'après les questions précédentes, $P(Z=k)=\sum\limits_{i=0}^{k}\dbinom{n-i}{k-i}\dbinom{n}{i}p^k(1-p)^{2n-k-i}$.

   Or, d'après l'indication, $\dbinom{n-i}{k-i}\dbinom{n}{i}=\dbinom{k}{i}\dbinom{n}{k}$.

   Donc $P(Z=k)=\sum\limits_{i=0}^{k}\dbinom{k}{i}\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k-i}=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\sum\limits_{i=0}^{k}\dbinom{k}{i}\left(\dfrac{1}{1-p}\right)^i$.

   Donc d'après le binôme de Newton, $P(Z=k)=\dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{2n-k}\left(\dfrac{2-p}{1-p}\right)^k=\dbinom{n}{k}\left(p(2-p)\right)^k\left((1-p)^2\right)^{n-k}$.

   On vérifie que $1-p(2-p)=(1-p)^2$ et donc on peut conclure que :
   Z suit une loi binomiale de paramètre $(n,p(2-p))$.
   Remarque : preuve (non demandée dans l'exercice) de l'égalité proposée dans l'indication :

$$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}=\frac{(n-i)!}{(n-k)!\,(k-i)!}\frac{n!}{i!\,(n-i)!}=\frac{n!}{(k-i)!\,(n-k)!\,i!}=\frac{k!}{(k-i)!\,i!}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}=\binom{k}{i}\binom{n}{k}.$$

   (c) D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n,p(2-p))$, alors :
   $E(Z)=np(2-p)$ et $V(Z)=np(2-p)\left(1-p(2-p)\right)=np(2-p)(p-1)^2$.

8 correction :

1. Soit $i\in[\![1,N]\!]$.
   $X_i(\Omega)=\mathbb{N}^*$ et $\forall k\in\mathbb{N}^*,\ P(X_i=k)=p(1-p)^{k-1}=pq^{k-1}$.
   Alors on a $P(X_i\leqslant n)=\sum\limits_{k=1}^{n}P(X_i=k)=\sum\limits_{k=1}^{n}pq^{k-1}=p\dfrac{1-q^n}{1-q}=1-q^n$.
   Donc $P(X_i>n)=1-P(X_i\leqslant n)=q^n$.

2. (a) $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$P(Y > n) = P((X_1 > n) \cap \cdots \cap (X_N > n))$
Donc $P(Y > n) = \prod_{i=1}^{N} P(X_i > n)$ car les variables $X_1, \cdots, X_N$ sont mutuellement indépendantes.
Donc $P(Y > n) = \prod_{i=1}^{N} q^n = q^{nN}$.
Or $P(Y \leqslant n) = 1 - P(Y > n)$
donc $P(Y \leqslant n) = 1 - q^{nN}$.
Calcul de $P(Y = n)$:

Premier cas : si $n \geqslant 2$.
$P(Y = n) = P(Y \leqslant n) - P(Y \leqslant n - 1)$.
Donc $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$.
Deuxième cas : si $n = 1$.
$P(Y = n) = P(Y = 1) = 1 - P(Y > 1) = 1 - q^N$.
Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$.

(b) D'après 2.(a), $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = q^{(n-1)N}(1 - q^N)$.
C'est-à-dire $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $P(Y = n) = \left(1 - (1 - q^N)\right)^{n-1}(1 - q^N)$.
On en déduit que Y suit une loi géométrique de paramètre $1 - q^N$.
Donc, d'après le cours, Y admet une espérance et $E(Y) = \dfrac{1}{1 - q^N}$.