

Table des matières

I. Rappels de PCSI : fonctions de 2 variables 2

 I.1 Dérivées partielles premières 2

 I.2 La classe $\mathcal{C}^1$ 2

 I.3 DL1 3

 I.4 Vecteur gradient et plan tangent 5

 I.5 Dérivées partielles et composées 5

 5.a) Dérivée selon un vecteur 5

 5.b) Règle de la chaîne 6

 5.c) Lignes de niveau planes 7

 I.6 Extremums 8

 6.a) Extremums locaux ou globaux 8

II. Dérivation des fonctions vectorielles de la variable réelle. 10

 II.1 Définition 10

 II.2 Propriétés 11

 2.a) Dérivation et linéarité 11

 2.b) Dérivation et linéarité 12

 2.c) Dérivation et p -linéarité 12

 2.d) Dérivation et composée 12

III. Fonctions de p variables 13

 III.1 Dérivées partielles 13

 III.2 DL1, gradient, différentielle 14

 III.3 Règle de la chaîne 15

 III.4 La classe $\mathcal{C}^2$ 17

 4.a) Définition 17

 4.b) Matrice hessienne 17

 4.c) DL2 18

 III.5 Extremums 19

Pré-requis

Objectifs

I. Rappels de PCSI : fonctions de 2 variables

On note $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ la base canonique de $E = \mathbb{R}^2$.

I.1 Dérivées partielles premières

Définition 1.

Soit a un point de $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$.

On dit que $f : (x, y) \mapsto f(x, y)$ admet une dérivée partielle en a par rapport à sa 1ère variable si la limite suivante existe et est finie (dans $\mathbb{R}$) :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(a + h\vec{e}_1) - f(a))$$

Si tel est le cas on note $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$ la valeur de cette limite.

On dit que f admet une dérivée partielle en a par rapport à sa 2ème variable si la limite suivante existe et est finie (dans $\mathbb{R}$) :

$$\lim_{k \rightarrow 0} \frac{1}{k} (f(a + k\vec{e}_2) - f(a))$$

Si tel est le cas on note $\frac{\partial f}{\partial y}(a)$ la valeur de cette limite.

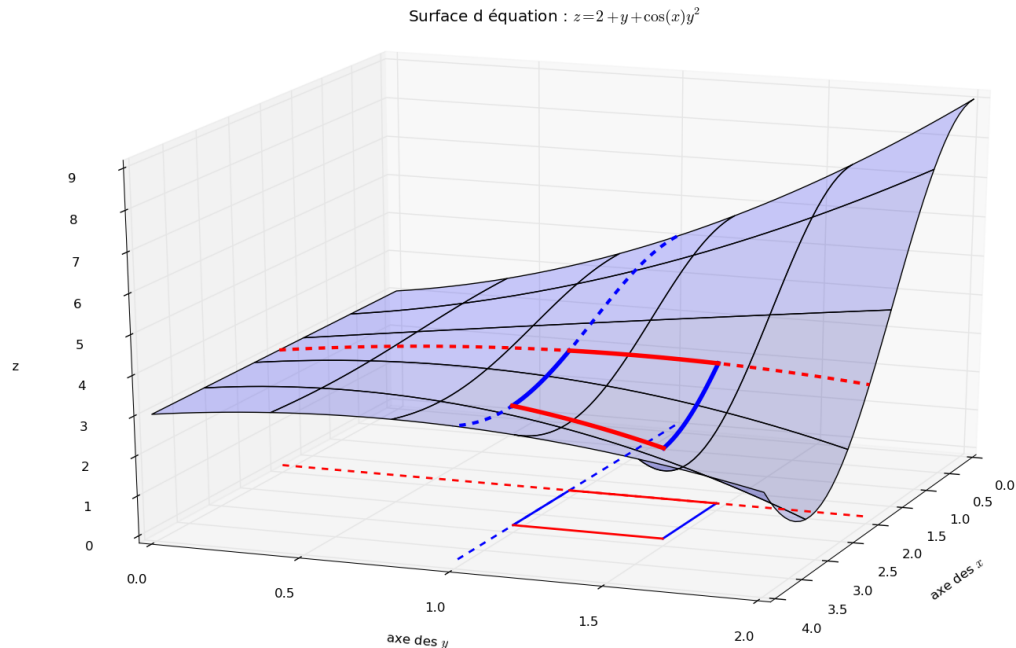
I.2 La classe $\mathcal{C}^1$

Définition 2.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. Une application $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si les applications dérivées partielles $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(u)$, $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(u)$ existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.

Notation 1. On note $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

I.3 DL1



Proposition 1 (D.L. d'ordre 1).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (a_1, a_2)$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors

$$f(a + \vec{h}) \underset{\vec{h} \rightarrow 0}{=} f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial y}(a) + o(\|\vec{h}\|_2)$$

démonstration (HP) :

On pose $f_{\cdot, a_2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_1 \mapsto f(x_1, a_2)$

Comme f est de classe $\mathcal{C}^1$, $f_{\cdot, a_2}$ est aussi de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc

$$f_{\cdot, a_2}(a_1 + h_1) \underset{h_1 \rightarrow 0}{=} f_{\cdot, a_2}(a_1) + h_1 \frac{df_{\cdot, a_2}}{dx_1}(a_1) + o(h_1)$$

ou encore

$$f(a_1 + h_1, a_2) \underset{h_1 \rightarrow 0}{=} f(a_1, a_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + o(h_1) \quad (1)$$

De même on pose $f_{a_1 + h_1, \cdot} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_2 \mapsto f(a_1 + h_1, x_2)$ et on obtient :

$$f_{a_1 + h_1, \cdot}(a_2 + h_2) \underset{h_2 \rightarrow 0}{=} f_{a_1 + h_1, \cdot}(a_2) + h_2 \frac{df_{a_1 + h_1, \cdot}}{dx_2}(a_2) + o(h_2)$$

ou encore

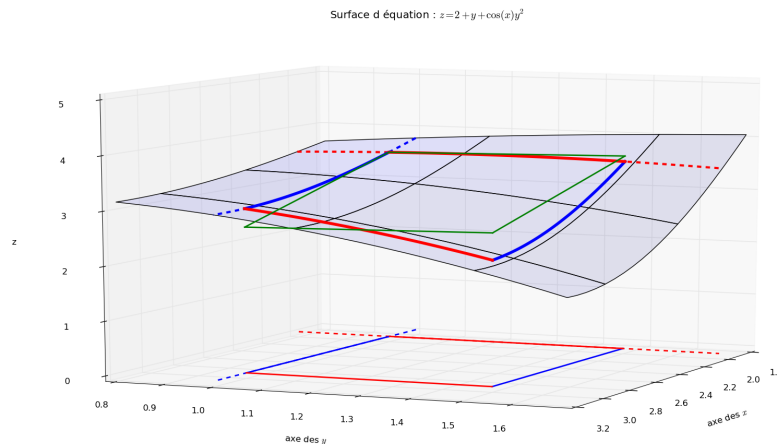
$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \underset{h_2 \rightarrow 0}{=} f(a_1 + h_1, a_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, a_2) + o(h_2) \quad (2)$$

Or par continuité de $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, a_2) \underset{h_1 \rightarrow 0}{=} \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) + o(h_1) \quad (3)$$

Mais alors, d'après (9), (10), (11), on a

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \underset{h_2 \rightarrow 0}{=} f(a_1, a_2) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a_1, a_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1, a_2) + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}\right) \quad (4)$$



Corollaire 2.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$. On a : $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.
i.e. : toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.

Proposition 3.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$.
Toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.
L'ensemble $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

I.4 Vecteur gradient et plan tangent

Définition 3.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. On appelle (vecteur) **gradient** de f en a le vecteur, noté $\nabla f(a)$, correspondant au vecteur colonne $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a) \end{pmatrix}$ dans la base canonique.

Proposition 4.

On considère la surface $\mathcal{S}$ d'équation cartésienne $z = f(x, y)$, où $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, avec $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$. Soit $(x_0, y_0) \in \mathcal{U}$ et $z_0 = f(x_0, y_0)$.
le plan tangent à la surface $\mathcal{S}$ en (x_0, y_0) est le plan d'équation cartésienne :

$$z - z_0 = (x - x_0) \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$$

Proposition 5 (D.L. d'ordre 1).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors pour $\vec{h}$ vecteur de $\mathbb{R}^2$, on a avec la notation $(\mid)$ pour le produit scalaire usuel :

$$f(a + \vec{h}) \underset{\vec{h} \rightarrow 0}{=} f(a) + \langle \nabla f(a) \mid \vec{h} \rangle + o\left(\|\vec{h}\|_2\right)$$

Remarque 1. Interprétation : le gradient de f en $a = (x_0, y_0)$ définit la direction dans laquelle f croît le plus vite (ligne de plus grande pente sur la surface correspondante).

I.5 Dérivées partielles et composées

5.a) Dérivée selon un vecteur

Définition 4.

Soient $a = (x_0, y_0)$ un point de l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^2$, $\vec{v} = (v_1, v_2)$ un vecteur **non nul** de $\mathbb{R}^2$ et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f admet une dérivée suivant le vecteur $\vec{v}$ en a , notée $D_{\vec{v}}f(a)$ lorsque la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t}$$

Remarque 2. Comme $\mathcal{U}$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \mathcal{U}$, donc pour t tel que $t\|\vec{v}\| < r$, $a + t\vec{v} \in \mathcal{U}$. L'existence de $D_{\vec{v}}f(a)$ est équivalente à la dérivabilité en 0 de l'application $\varphi_{\vec{v}} : t \mapsto f(a + t\vec{v})$.

Proposition 6.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $a = (x_0, y_0)$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors pour $\vec{v}$ vecteur de $\mathbb{R}^2$, on a avec la notation $\langle \mid \rangle$ pour le produit scalaire usuel :

$$D_{\vec{v}} f(a) = \langle \nabla f(a) \mid \vec{v} \rangle$$

dém : $\vec{h} = t\vec{v}$ on simplifie par t . $\square$.

5.b) Règle de la chaîne**Proposition 7 (règle de la chaîne).**

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, I un intervalle ouvert, x, y des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que $\{\gamma(t) = (x(t), y(t)); t \in I\} \subset \mathcal{U}$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors $t \mapsto f(x(t), y(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$, on a :

$$\frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t)) \times \frac{dx}{dt}(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t)) \times \frac{dy}{dt}(t)$$

démonstration : On a pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$x_i(t+h) = x_i(t) + hx'_i(t) + h\varepsilon_i(h), \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_i(h) = 0 \quad (5)$$

et pour $a = (x_1(t), \dots, x_p(t))$ et $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p) = (hx'_i(t) + h\varepsilon_i(h))_{1 \leq i \leq p}$:

$$f(a + \delta) = f(a) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \delta_i \quad (6)$$

$$\text{Donc } \frac{1}{h}(f(x(t+h)) - f(x(t))) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))x'_i(t) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))\varepsilon_i(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t))x'_i(t). \quad \square$$

Remarque 3. En physique, on note $V = f \circ \gamma$ et la dérivée par rapport à t est $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1}x'_1(t) + \dots + \frac{\partial V}{\partial x_p}x'_p(t)$.

Remarque 4. Interprétation : en physique cela correspond à la dérivation de f le long de l'arc γ donné par $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

$$f \circ \gamma'(t) = \langle \nabla f(a) \mid \gamma'(t) \rangle \text{ où le vecteur vitesse est } \gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$$

Proposition 8 (dérivée partielles de fonctions composées).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, $(u, v) \mapsto (\varphi(u, v), \psi(u, v))$ et $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, et $g = f \circ \Phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On a

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \times \frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \times \frac{\partial \psi}{\partial u}(u, v)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \times \frac{\partial \varphi}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(u, v), \psi(u, v)) \times \frac{\partial \psi}{\partial v}(u, v)$$

Remarque 5. En physique : $x = \varphi(u, v)$ et $y = \psi(u, v)$ et :

$$\ll \frac{\partial g}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \times \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \times \frac{\partial y}{\partial u} \gg$$

5.c) Lignes de niveau planes

Définition 5.

Si $\mathcal{C}$ est une courbe plane, paramétrée par $\gamma : t \mapsto (x(t), y(t))$ alors la tangente à la courbe au point M de coordonnées $(x(t_0), y(t_0))$ est la droite passant par M et dirigée par le vecteur « vitesse » $(x'(t_0), y'(t_0))$.

Proposition 9 (le gradient est orthogonal aux lignes de niveau).

Si $\mathcal{L}_K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; f(x, y) = K\}$ est une courbe d'équation cartésienne $f(x, y) = K$, pour $K \in \mathbb{R}$ constante fixée, alors pour tout point M de $\mathcal{C}$, et pour tout vecteur $\vec{T}_M$ tangent à la courbe en M , on a $\nabla f(M) \perp \vec{T}_M$.

démonstration : On peut paramétrer la ligne de niveau K par : $\mathcal{L}_K = \{(x(t), y(t)); t \in I\}$, pour un intervalle réel I , et $x, y \in \mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$.

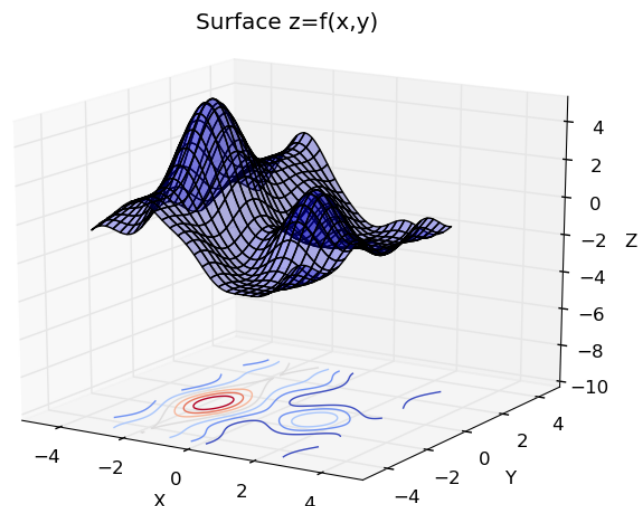
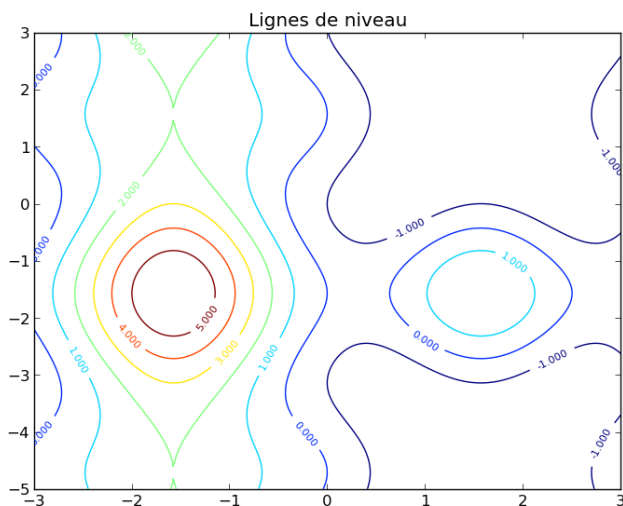
Comme pour tout $t \in I$, $K = f(x(t), y(t))$, en dérivant on obtient :

$$0 = \frac{d}{dt} f(x(t), y(t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t))x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t))y'(t),$$

d'où $\langle \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}(t) \cdot \nabla f(M) \rangle = 0$, le vecteur vitesse $\vec{T}_M$ étant le vecteur de coordonnées $(x'(t), y'(t))$ $\square$

Remarque 6. En physique, on dit que le gradient est orthogonal aux lignes de niveau (équipotentielles), et orienté selon les valeurs croissantes de f , en tout point où il est non nul.

exemple 1. $z = f(x, y) = -2 + (1 - \sin(x))^2 + (\sin(y) - \sin(x))^2$



Remarque 7. Pour un relief paramétré par $z = f(x, y)$, le vecteur $\nabla f((x, y))$ dirige la plus grande pente au point $M(x, y, f(x, y))$ de la surface : en effet, la variation de $f(x(t), y(t)) - f(x_M, y_M)$ est maximale lorsque le terme d'ordre 1 $\frac{d}{dt} \overrightarrow{OM}(t) \cdot \nabla f(x_M, y_M) >$ est maximal, ce qui correspond au cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz !

I.6 Extremums

6.a) Extremums locaux ou globaux

Définition 6.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point de $\mathcal{U}$.

On dit que f admet un **minimum**, resp. **maximum** **local** en a , s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que :

$\forall x \in \mathcal{U}, \|x - a\| < \varepsilon \Rightarrow f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$)

Si f admet un maximum ou un minimum local en a , on dit que f admet un **extremum local**.

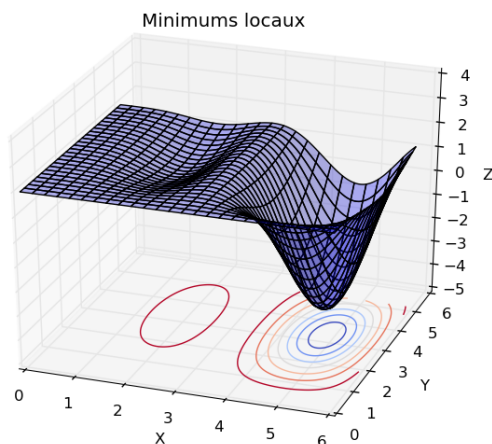
Définition 7.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point de $\mathcal{U}$.

On dit que f admet un **minimum global** (resp. **maximum global**) en a , si :

$\forall x \in \mathcal{U}, f(x) \geq f(a)$ (resp. $f(x) \leq f(a)$)

Si f admet un maximum ou un minimum global en a , on dit que f admet un **extremum global**.



$f : (x, y) \mapsto 2 - 1/4 \sin(y/2)^2 (x \sin(x))^2$ n'a pas de minimum global (elle tend vers $-\infty$ le long de la suite de points $M_n = (n\pi/2, \pi)$, mais a pour maximum global la valeur 2 atteinte en les $(k\pi, 2\ell\pi)$ pour k, ℓ entiers.

Définition 8 (point critique).

Soit $a \in \mathcal{U}$ avec $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.

On dit que $a = (x_0, y_0)$ est un **point critique** de f si :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a) = \frac{\partial f}{\partial y}(a) = 0$$

Remarque 8. c.à.d. a critique ssi $\nabla f(a) = \vec{0}$

Proposition 10.

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ et a un point de $\mathcal{U}$. Si f admet un extremum en a , alors a est un point critique.

démonstration : Dans le cas d'un maximum local (a fortiori dans le cas d'un maximum global) : nécessairement, pour $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\forall t \in]-\varepsilon, \varepsilon[$, $f(a + t\vec{e}_i) \leq f(a)$.

Mais alors, la fonction $\varphi :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto f(a + t\vec{e}_i)$ est une fonction dérivable, qui admet un maximum en 0, donc $\varphi'(0) = 0$. On en déduit que $\frac{d}{dt}(f(a + t\vec{e}_i))|_{t=0} = 0$, ce qui revient à dire que $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$.

Remarque 9. En pratique, lorsque l'on cherche à déterminer le maximum d'une fonction à valeurs réelles, définie sur une partie fermée bornée D du plan :

- On cherche le maximum m_b sur son bord ∂D (il est atteint, car f est continue sur le fermé borné ∂D).
- On recherche d'éventuels points critiques sur l'intérieur $\text{int}(D)$.
- S'il n'y en a pas, la borne supérieure est réalisée au bord, et elle est atteinte, c'est un maximum.
- S'il y en a, on compare le maximum au bord, avec les valeurs en les points critiques.

II. Dérivation des fonctions vectorielles de la variable réelle.

II.1 Définition

Définition 9.

Soient I un intervalle réel, $t_0 \in I$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$.

On dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $t \mapsto \begin{pmatrix} f_1(t) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$ est **dérivable** en t_0 si et seulement si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(t_0 + h) - f(t_0))$$

Si tel est le cas, on note $f'(t_0)$ la valeur de cette limite, appelée **vecteur dérivé de f en t_0** .

De plus, si cela est vrai en tout point t_0 de I on dit que f est dérivable sur I et on note f' sa fonction dérivée.

Proposition 11 (DL1 vectoriel).

Si $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est dérivable en t_0 , alors :

$$f(t_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} f(t_0) + hf'(t_0) + \vec{o}(h)$$

où $f'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (f(t_0 + h) - f(t_0))$

démonstration :

On sait que $x_i(t_0 + h) \underset{h \rightarrow 0}{=} x_i(t_0) + hx'_i(t_0) + o(h)$ pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$

donc vectoriellement : $\begin{pmatrix} x_1(t_0 + h) \\ \vdots \\ x_n(t_0 + h) \end{pmatrix} \underset{h \rightarrow 0}{=} \begin{pmatrix} x_1(t_0) \\ \vdots \\ x_n(t_0) \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} x'_1(t_0) \\ \vdots \\ x'_n(t_0) \end{pmatrix} + \vec{o}(h)$

puis $\frac{1}{h} (X(t_0 + h) - X(t_0)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{h} (x_1(t_0 + h) - x_1(t_0)) \\ \vdots \\ \frac{1}{h} (x_n(t_0 + h) - x_n(t_0)) \end{pmatrix} \xrightarrow{h \rightarrow 0} X'(t_0) \quad \square$

Proposition 12 (vecteur dérivé).

On dit qu'une application vectorielle $X : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $t \mapsto \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ est **dérivable** si et seulement si ses applications coordonnées $x_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont dérivables, pour $1 \leq i \leq n$.
Si tel est le cas, on note $X' : \mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, $t \mapsto \begin{pmatrix} x'_1(t) \\ \vdots \\ x'_n(t) \end{pmatrix}$ sa dérivée vectorielle.

Remarque 10. On a (comme pour les fonctions réelles de la variable réelle) équivalence entre la dérivabilité et l'existence d'un développement limité d'ordre 1.

Remarque 11. Intéprétation physique : vecteur vitesse

Définition 10 (classe $\mathcal{C}^k$).

Lorsque f' est continue, on dit que f est de classe $\mathcal{C}^1$.
On définit $\mathcal{C}^k(I, \mathbb{R}^n)$ comme pour les fonctions à valeurs réelles, et cela est équivalent à avoir des fonctions composantes de classe $\mathcal{C}^k$.

II.2 Propriétés

2.a) Dérivation et linéarité

Proposition 13 (dérivation et linéarité).

Soit $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ et $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable sur I .
Alors $g = L \circ f : t \mapsto L(f(t))$ est dérivable sur I et

$$\forall t \in I, g'(t) = (L \circ f)'(t) = L(f'(t))$$

démonstration :

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + \varepsilon_h, \text{ donc } \frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) = f'(t) + \varepsilon_h \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(t)$$

Ainsi

$$\frac{1}{h}(L \circ f(t+h) - L \circ f(t)) \underset{\text{lin}}{=} L \left(\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) \right) = L(f'(t) + \varepsilon_h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} L(f'(t))$$

car toute application linéaire est continue puisque lipschitzienne $\square$

2.b) Dérivation et linéarité

Proposition 14.

Soient E, F euclidiens, $f, g : I \rightarrow E$ dérivable, et $B : E \times E \rightarrow F$ une application bilinéaire. Alors $B(f, g) : I \rightarrow F$, $t \mapsto B(f(t), g(t))$ est dérivable sur I , et :

$$\forall t \in I, (B(f(t), g(t)))'(t) = B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$$

démonstration non exigible $\frac{1}{h}(B(f(t+h), g(t+h)) - B(f(t), g(t))) = \frac{1}{h}(B(f(t+h), g(t+h)) - B(f(t), g(t+h))) + \frac{1}{h}(B(f(t), g(t+h)) - B(f(t), g(t)))$
 $\xrightarrow{h \rightarrow 0} B(f'(t), g(t)) + B(f(t), g'(t))$

car toute application bilinéaire est continue et car $\frac{1}{h}(f(t+h) - f(t)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} f'(t)$ et $\frac{1}{h}(g(t+h) - g(t)) \xrightarrow{h \rightarrow 0} g'(t)$.

□

exemple 2 (Produit scalaire).

Si $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, alors $t \mapsto \langle f(t) | g(t) \rangle$ est dérivable de dérivée $t \mapsto \langle f'(t) | g(t) \rangle + \langle f(t) | g'(t) \rangle = 2 \langle f'(t) | g(t) \rangle$

exemple 3 (Trajectoire orthoradiale).

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ est tel que : $\forall t \in I, f(t) \perp f'(t)$, alors $t \mapsto \|f(t)\|^2 = \langle f(t) | f(t) \rangle$ est constante : le mouvement est circulaire !

exemple 4. Si $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, alors $t \mapsto \det(f(t), g(t))$ est dérivable de dérivée $t \mapsto \det(f'(t), g(t)) + \det(f(t), g'(t))$

2.c) Dérivation et p -linéarité

Proposition 15.

Soient M p -linéaire et $f_1, \dots, f_p$ dérivables. Alors $M(f_1, \dots, f_p)$ est dérivable et

$$\forall t \in I, (M(f_1, \dots, f_p))'(t) = \sum_{k=1}^p M(f_1(t), \dots, f_{k-1}(t), f'_k(t), f_{k+1}(t), \dots, f_p(t))$$

démonstration non exigible

Application au déterminant d'une famille de n vecteurs colonnes.

2.d) Dérivation et composée

Proposition 16.

Soient I, J deux intervalles réels, E euclidien, $\vec{f} : I \rightarrow E$ dérivable et $\varphi : J \rightarrow I$ dérivable. Alors $\vec{f} \circ \varphi : J \rightarrow E$, $t \mapsto \vec{f}(\varphi(t))$ est dérivable sur J , et :

$$\forall s \in J, (\vec{f}(\varphi(s)))'(s) = \varphi'(s) \vec{f}'(\varphi(s))$$

démonstration :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left(\vec{f} \circ \varphi(t+h) - \vec{f} \circ \varphi(t) \right) \stackrel{DL1}{=} \frac{1}{h} \left(\vec{f}(\varphi(t) + h\varphi'(t) + o(h)) - \vec{f}(\varphi(t)) \right) \\ & \stackrel{DL1}{=} \frac{1}{h} \left(\vec{f}(\varphi(t)) + (h\varphi'(t) + o(h)) \vec{f}'(\varphi(t)) + \vec{o}(h\varphi'(t) + o(h)) - \vec{f}(\varphi(t)) \right) \\ & = \frac{1}{h} \left((h\varphi'(t) + o(h)) \vec{f}'(\varphi(t)) + \vec{o}(h\varphi'(t) + o(h)) \right) \\ & = \varphi'(t) \vec{f}'(\varphi(t)) + o(1) \vec{f}'(\varphi(t)) + \vec{o}(\varphi'(t) + o(1)) = \varphi'(t) \vec{f}'(\varphi(t)) + \vec{o}(1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \varphi'(t) \vec{f}'(\varphi(t)) \quad \square \end{aligned}$$

Remarque 12. En physique on peut changer d'échelle de temps.

III. Fonctions de p variables

Cadre $p = 2$ ou $p = 3$ On considère des fonctions $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$, avec $n \in \{1, 2, 3\}$.
On note $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

III.1 Dérivées partielles

Définition 11.

Soient a un point de l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$, $\vec{v}$ = un vecteur **non nul** de $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$.
On dit que f admet une dérivée suivant le vecteur $\vec{v}$ en a , notée $D_{\vec{v}}f(a)$ lorsque la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{f(a + t\vec{v}) - f(a)}{t}$$

Remarque 13. Comme $\mathcal{U}$ est ouvert, il existe $r > 0$ tel que $B(a, r) \subset \mathcal{U}$, donc pour t tel que $t\|\vec{v}\| < r$, $a + t\vec{v} \in \mathcal{U}$.
L'existence de $D_{\vec{v}}f(a)$ est équivalente à la dérivabilité en 0 de l'application $\varphi_{\vec{v}} : t \mapsto f(a + t\vec{v})$.

Définition 12.

Soient a un point de l'ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$ et $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$.
On dit que f admet une dérivée partielle d'ordre 1 en a par rapport à sa i ème coordonnée si la limite suivante existe et est finie :

$$\lim_{t \rightarrow 0, t \neq 0} \frac{f(a + t\vec{e}_i) - f(a)}{t}$$

Si tel est le cas, on note $\partial_i f(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ la valeur de cette limite finie $D_{\vec{e}_i}f(a)$, appelée dérivée partielle d'ordre 1 en a par rapport à sa i ème coordonnée.

Définition 13.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de E . Une application $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$ si ses applications dérivées partielles $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(u)$, pour $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, existent et sont continues sur $\mathcal{U}$.

Notation 2. On note $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ de $\mathbb{R}^p$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Remarque 14. On généralise la notation à $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}^n)$ pour des fonctions à valeurs vectorielles dont les composantes appartiennent à $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$

Corollaire 17.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$. On a : $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R}) \subset \mathcal{C}^0(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.
i.e. : toute fonction de classe $\mathcal{C}^1$ est continue.

Proposition 18.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$.
Toute combinaison linéaire de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert $\mathcal{U}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.
L'ensemble $\mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$ est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel.

III.2 DL1, gradient, différentielle

Proposition 19 (D.L. d'ordre 1 et somme).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_i)_{1 \leq i \leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors

$$f(a + \vec{h}) \underset{\vec{h} \rightarrow 0}{=} f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + o\left(\|\vec{h}\|_2\right)$$

Définition 14.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, a un point de $\mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. On appelle

(vecteur) **gradient** de f en a le vecteur, noté $\nabla f(a)$, correspondant au vecteur colonne $\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) \\ \frac{\partial f}{\partial x_3}(a) \end{pmatrix}$ dans

la base canonique.

Proposition 20 (D.L. d'ordre 1 et gradient).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_i)_{1 \leq i \leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors pour $\vec{h}$ vecteur de $\mathbb{R}^p$, on a avec la notation $(\mid)$ pour le produit scalaire usuel :

$$f(a + \vec{h}) \underset{\vec{h} \rightarrow 0}{=} f(a) + \left\langle \nabla f(a) \mid \vec{h} \right\rangle + o\left(\|\vec{h}\|_2\right)$$

Définition 15.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$, a un point de $\mathcal{U}$ et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$. On appelle **différentielle** de f en a l'application linéaire appartenant à $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, noté $df(a)$, définie par :

$$df(a) : (h_1, \dots, h_p) \mapsto \sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$$

Notation 3. Le terme $\sum_{j=1}^p h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ est parfois noté $df(a) \bullet \vec{h}$ et est égal à $(\nabla f(a) | \vec{h})$.

Remarque 15. En physique, pour une fonction $(p, T) \mapsto S(p, T)$, on écrit parfois « $dS = \frac{\partial S}{\partial p} dp + \frac{\partial S}{\partial T} dT$ » pour désigner l'approximation à l'ordre 1 :

$$S(p_0 + \delta p, T_0 + \delta T) - S(p_0, T_0) \underset{\delta \rightarrow 0, \delta p \rightarrow 0}{=} \frac{\partial S}{\partial p}(p_0, T_0) \delta p + \frac{\partial S}{\partial T}(p_0, T_0) \delta T + o(\sqrt{\delta p^2 + \delta T^2})$$

Proposition 21 (D.L. d'ordre 1 et différentielle).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_i)_{1 \leq i \leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^1(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors pour $\vec{h}$ vecteur de $\mathbb{R}^p$, on a :

$$f(a + \vec{h}) \underset{\vec{h} \rightarrow 0}{=} f(a) + df(a) \bullet \vec{h} + o(\|\vec{h}\|_2)$$

III.3 Règle de la chaîne

Proposition 22 (règle de la chaîne).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, I un intervalle ouvert, $x_1, \dots, x_p$ des fonctions de classe $\mathcal{C}^1(I, \mathbb{R})$ telles que $\{x(t) = (x_1(t), \dots, x_p(t)); t \in I\} \subset \mathcal{U}$, $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.

Alors $t \mapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$, on a :

$$\frac{d}{dt} (f(x_1(t), \dots, x_p(t))) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(x(t)) \frac{dx_1}{dt}(t) + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_p}(x(t)) \frac{dx_p}{dt}(t)$$

démonstration : On a pour tout $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$:

$$x_i(t+h) = x_i(t) + hx'_i(t) + h\varepsilon_i(h), \text{ avec } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon_i(h) = 0 \quad (7)$$

et pour $a = (x_1(t), \dots, x_p(t))$ et $\delta = (\delta_1, \dots, \delta_p) = (hx'_i(t) + h\varepsilon_i(h))_{1 \leq i \leq p}$:

$$f(a + \delta) = f(a) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \delta_i \quad (8)$$

$$\text{Donc } \frac{1}{h} (f(x(t+h)) - f(x(t))) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) x'_i(t) + \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) \varepsilon_i(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(x(t)) x'_i(t). \quad \square$$

Remarque 16. En physique, on note $V = f \circ x$ et la dérivée par rapport à t est $\frac{dV}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x_1} x'_1(t) + \cdots + \frac{\partial V}{\partial x_p} x'_p(t)$.

Proposition 23 (fonctions constantes).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert convexe de $\mathbb{R}^p$ et $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$
Alors f est constante sur $\mathcal{U}$ si et seulement si ses dérivées partielles premières sont nulles sur $\mathcal{U}$.

démonstration : pour tout chemin, $0 = (f \circ \gamma)'(t) = \nabla f(a) \cdots \gamma'(t)$ donc le gradient est orthogonal à tous les vecteurs de $\mathbb{R}^p$ donc est le vecteur nul.

□

Proposition 24 (dérivée partielles de fonctions composées).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, $\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$
et $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, et $g = f \circ \varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $(u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$ de classe $\mathcal{C}^1$.

On a

$$\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)$$

et

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \times \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)$$

Proposition 25 (utilisation des coordonnées polaires).

Soient $\mathcal{V}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$ ne contenant pas $(0, 0)$, $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$,

$\varphi : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}$, $(\rho, \theta) \mapsto (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta)$

et $f : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y)$, et $g : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $(\rho, \theta) \mapsto f((\rho \cos \theta, \rho \sin \theta))$

On a

$$\frac{\partial g}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \times \cos \theta + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \times \sin \theta$$

$$\frac{\partial g}{\partial \theta}(\rho, \theta) = \frac{\partial f}{\partial x}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \times (-\rho \sin \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) \times \rho \cos \theta$$

démonstration : on compose les D.L. d'ordre 1.

Remarque 17. En physique, pour une fonction $(x, y) \mapsto V(x, y)$, on écrit parfois « $\frac{\partial V}{\partial \rho} = \frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \rho}$ »

pour désigner : $\frac{\partial V \circ \varphi}{\partial \rho}(\rho, \theta) = \frac{\partial V}{\partial x}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) \times \frac{\partial x}{\partial \rho}(\rho, \theta) + \frac{\partial V}{\partial y}(x(\rho, \theta), y(\rho, \theta)) \times \frac{\partial y}{\partial \rho}(\rho, \theta)$

III.4 La classe $\mathcal{C}^2$

4.a) Définition

Définition 16.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^3$. Une application $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ si les applications dérivées partielles $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(u)$, $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial y}(u)$, $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial z}(u)$ existent et sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{U}$.

Notation 4. Dans le cas d'une application de 3 variables vers $\mathbb{R}$, lorsqu'elle existent, on note :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j}(a + h \vec{e}_i) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, a_2, a_3) \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)(a)$$

On rencontre aussi la notation $\partial_{ij}^2 f$ pour désigner $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$, et les notations :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(a_1 + h, a_2, a_3) - \frac{\partial f}{\partial y}(a_1, a_2, a_3) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)(a)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a_1 + h, a_2, a_3) - \frac{\partial f}{\partial x}(a_1, a_2, a_3) \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)(a)$$

etc...

4.b) Matrice hessienne

Théorème 26 (De Schwarz).

Si $f : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathcal{U}$ ouvert de $\mathbb{R}^3$, alors pour tous $i, j \in \llbracket 1, 3 \rrbracket$, et tout $a \in \mathcal{U}$ on a :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$$

[ADMIS]

Définition 17.

Soit $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.

On appelle matrice hessienne de f en $a \in \mathcal{U}$ la matrice symétrique réelle notée $H_f(a)$ définie par

$$H_f(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p}$$

Remarque 18. Matrice symétrique par Schwarz

4.c) DL2

Proposition 27 (D.L. d'ordre 2 et somme).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, $a = (a_i)_{1 \leq i \leq p}$ un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors

$$f(a + \vec{h}) \underset{\vec{h} \rightarrow 0}{=} f(a) + \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(a) h_k + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o\left(\|\vec{h}\|_2^2\right)$$

démonstration (HP) :

Comme f est de classe $\mathcal{C}^2$,

$$f(a_1 + h_1, a_2) \underset{h_1 \rightarrow 0}{=} f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + \frac{h_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) + o(h_1^2) \quad (9)$$

et

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \underset{h_2 \rightarrow 0}{=} f(a_1 + h_1, a_2) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, a_2) + \frac{h_2^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a_1 + h_1, a_2) + o(h_2^2) \quad (10)$$

Or par classe $\mathcal{C}^1$ de $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1 + h_1, a_2) \underset{h_1 \rightarrow 0}{=} \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + h_1 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) + o(h_1^2) \quad (11)$$

Mais alors, d'après (9), (10), (11), on a

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \underset{h_2 \rightarrow 0}{=} f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \frac{h_1^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) + h_1 h_2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) + \frac{h_2^2}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) + o\left(\sqrt{h_1^2 + h_2^2}^2\right) \quad (12)$$

cest à dire

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) \underset{h_2 \rightarrow 0}{=} f(a) + h_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(a) + h_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}(a) + \frac{1}{2} \sum_{1 \leq i, j \leq 2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j + o\left(\|\vec{h}\|_2^2\right) \quad (13)$$

Remarque 19. Pour $h \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ vecteur colonne, $h^T \times H_f(a) \times h = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) h_i h_j \right)_{1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq p}$

Proposition 28 (D.L. d'ordre 2 gradient et hessienne).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, a un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$. Alors

$$f(a + \vec{h}) \underset{\vec{h} \rightarrow 0}{=} f(a) + \nabla f(a)^T \times h + \frac{1}{2} h^T \times H_f(a) \times h + o\left(\|\vec{h}\|_2^2\right)$$

III.5 Extremums

On sait déjà pour les fonctions de plusieurs variables qu'une condition nécessaire d'extremum est d'être point critique, on peut préciser une C.N.s. pour la classe $\mathcal{C}^2$:

Proposition 29 (CNS minimum et hessienne).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^p$, a un point de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.

Alors

f admet un minimum local en a si et seulement si : a est un point critique de f et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.

f admet un minimum local strict en a si et seulement si :
 a est un point critique de f et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

dém en diagonalisant via le thé spectral $h^T H_f h = h^T P D P^T h = v^T D v = \sum_{k=1}^p d_k v_k^2$. Le signe est positif ssi D est à valeurs propres positives ; Le signe est strictement positif pour tout v non nul ssi D est à valeurs propres strictement positives ; $\square$

Corollaire 30 (fonction de 2 variables et hessienne).

Soient $\mathcal{U}$ un ouvert de $\mathbb{R}^2$, a un point critique de $\mathcal{U}$, et $f \in \mathcal{C}^2(\mathcal{U}, \mathbb{R})$.

Alors

Si $\det(H_f(a)) \leq 0$, f n'a pas d'extremum en a

Si $\det(H_f(a)) > 0$, f possède un extremum en a et de plus :

- si $\text{tr}(H_f(a)) > 0$ alors il s'agit d'un minimum local
- si $\text{tr}(H_f(a)) < 0$ alors il s'agit d'un maximum local

$$\text{dét}(\det(H_f(a))) = \lambda_1 \lambda_2$$

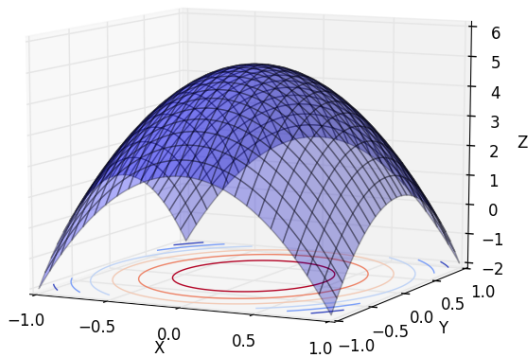
$$\text{tr}(H_f(a)) = \lambda_1 + \lambda_2, \text{ le polynôme caractéristique est } (X - \lambda_1)(X - \lambda_2).$$

Si les valeurs propres sont non nulles de signes contraires il n'y a pas d'extremum ; si elles sont non nulles et de même signe, soit elles sont toutes deux strictement positives et $H_f(a) \in \mathcal{S}_2^{++}$ (maximum local), soit elles sont toutes deux strictement négatives et $-H_f(a) \in \mathcal{S}_2^{++}$ (minimum local)

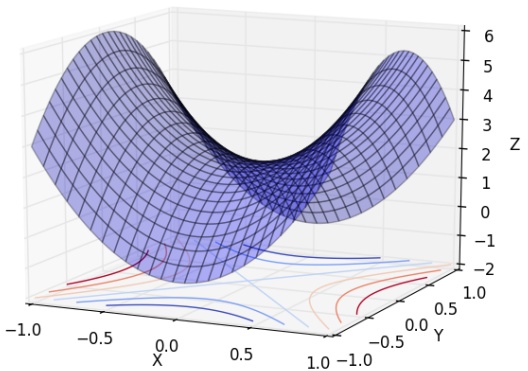
f admet un maximum local en a si et seulement si : a est un point critique de f et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^+(\mathbb{R})$.

f admet un maximum local strict en a si et seulement si :
 a est un point critique de f et si $H_f(a) \in \mathcal{S}_p^{++}(\mathbb{R})$.

Maximum local



Point selle



Minimum local

