Méthodes à retenir :

- Une condition nécessaire (non suffisante) pour observer l'extremum d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ en $A \in D$ avec D ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f de classe $\mathcal{C}^1$ est $\overrightarrow{Grad(f)}_A = \overrightarrow{0}$.
- Une condition CNS d'extremum d'une fonction $f : D \to \mathbb{R}$ en $A \in D$ avec D ouvert de $\mathbb{R}^2$ et f de classe $\mathcal{C}^2$ est $\overrightarrow{Grad(f)}_A = \overrightarrow{0}$ et $H(f)_a$ possède deux valeurs propres λ_1, λ_2 de même signe.
- Si F est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$, toute fonction continue $f : F \to \mathbb{R}$ y admet des extremums, qui sont atteints en des points de F (non nécessairement uniques).

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$f(x,y) = x^2y^2 - y^4$, et $A = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ fixé.
1) Déterminer le gradient de f en A. En déduire les extrema éventuels de f.
2) Déterminer la différentielle $\mathrm{d}f_A$ de f en A.

Exercice 2

Soient $g = f \circ \varphi$, avec $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto \mathbb{R}$, et
$\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ (r, \alpha) \mapsto (r\cos\alpha, r\sin\alpha)$

1. Exprimer, pour $A \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\dfrac{\partial g}{\partial r}(A)$, $\dfrac{\partial g}{\partial \alpha}(A)$ et $\dfrac{\partial g}{\partial z}(A)$ à l'aide de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(\varphi(A))$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(\varphi(A))$.
2. Application $f : (x,y) \mapsto \cos(xy)\ e^y,\ A = (1,2)$.

II. Exercices

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :
$f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.
1) Déterminer et représenter l'ensemble de définition D_f de f. Est-ce un ouvert, un fermé ?
2) Déterminer le plus grand ouvert Ω de $\mathbb{R}^2$ sur lequel f est de classe C^1.
3) Déterminer les éventuels points critiques de f et les extremas locaux

Exercice 4

f étant une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ on dérinit la fonction g sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Calculer $x\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ en fonction de $\dfrac{\partial g}{\partial r}$ et $\dfrac{\partial g}{\partial \theta}$ les dérivées partielles premières de g.

Exercice 5

1) Rappeler la définition d'un maximum local pour une fonction de deux variables à valeurs dans $\mathbb{R}$.
2) Déterminer les éventuels extrema de la fonction f définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $f(x,y) = e^x + e^y + e^{-x-y}$.

Exercice 6

f étant une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ on dérinit la fonction g sur $\mathbb{R}^2$ par

$$g(u,v) = f(u+v, u-v)$$

Calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)$ en fonction de $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$, $\dfrac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ les dérivées partielles secondes de g.

Exercice 7

Soit $f : (x,y) \longmapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Déterminer les points critiques de f.
3. Déterminer la hessienne $H_f(a)$ de f en chaque point critique de f.
4. Quels sont les extremums locaux de f ?

Exercice 8 ☆☆☆ *CCINP PSI*

On note f la fonction $(x,y) \mapsto x^2y + \ln(4+y^2)$.
a) Montrer que f admet sur $\mathbb{R}^2$ un unique point critique.
b) f admet-elle des extremums locaux ?

Exercice 9 ☆☆ *Mines-Télécom*

On considère
$f : (x,y) \mapsto \arctan x + \arctan y - \arctan(\dfrac{x+y}{1-xy})$.

1. Ensemble de définition D_f ?
2. Continuité ?
3. Existence de dérivées partielles ?
4. Justifier que les dérivées partielles sont nulles, qu'en déduire sur f?

Exercice 10 ☆

Soit U, V deux applications de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. On note $< \mid >$ le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^2$.

Montrer que $\varphi : t \longmapsto < U(t)|V(t) >$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et calculer sa dérivée.

Exercice 11

Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $x^2 + 4y^2 = z$ au point $A = (1; 0; 1)$.

III. Exercices avancés

Exercice 12 ☆☆ *mouvement circulaire*

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ une application dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ \|f(t)\|^2 = 1.$$

En dérivant cette égalité (justifier), montrer qu'à chaque instant t, les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.
Proposer une interprétation cinématique.

Exercice 13 ☆☆☆

Soient $Y_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A \in \mathfrak{M}_{n,2}(\mathbb{R})$.

On considère l'application

$$\delta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (a, b) \mapsto \left\| A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - Y_0 \right\|_2^2.$$

Justifier que δ est admet des dérivées partielles, et calculer les dérivées partielles de δ en (a, b), à l'aide de a, b , C_1, C_2, Y_0 et le produit scalaire $< \mid >$ usuel associé à la norme euclidienne $\| \ \|_2$ sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pourra réécrire $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = aC_1 + bC_2$, en notant C_1 et C_2 les colonnes de A.

Exercice 14 ☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice symétrique réelle, à valeurs propres positives, I un intervalle de $\mathbb{R}$, et $X : I \to \mathbb{R}^n$ dérivable telle que $X' = AX$.
Montrer que $t \mapsto \|X(t)\|_2$ est croissante sur I.

Exercice 15 ☆☆☆

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ t \mapsto \det(A - tI_n)$
1) Rappeler une formule du cours faisant intervenir $\varphi(t)$, $\det A$ et $\operatorname{tr} A$.
2) Justifier que l'application φ est continue sur $\mathbb{R}$.
3) Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, et calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.

Exercice 16

Soit
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
2. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
3. Justifier l'existence et calculer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. En déduire que f n'est pas de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 17 ☆☆ *CCINP PC*

Soit $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ harmonique c'est-à-dire g est de classe C^2 et $\dfrac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$. 1) Trouver a, b des réels tels que $\dfrac{1}{1 - t^2} = \dfrac{a}{1 + t} + \dfrac{b}{1 - t}$.

2) Résoudre l'équation différentielle $(1 - t^2)y'' - 2ty' = 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $F = fog$.

3) Exprimer $\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

4) On suppose que f'' ne s'annule pas. Montrer que F est harmonique ssi g est une constante.

Soit $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $G(x, y) = h(\dfrac{\cos(x)}{\operatorname{ch}(y)})$.

5) Déterminer les applications h telles que G soit harmonique.

Exercice 18 *Mines*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+\star}, \mathbb{R})$ telles que

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

Exercice 19 *Ligne de plus grande pente*

Soit $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R},\ (x,y) \longmapsto h(x,y)$ de classe $\mathcal{C}^1$, et la surface paramétrée $\mathcal{S} = \{(x,y,h(x,y))\}$.
Soit $A_0 = (x_0,y_0)$ un point du plan, et $B_0 = (x_0,y_0,h(x_0,y_0))$ le point correspondant sur la surface $\mathcal{S}$.
Soit $\overrightarrow{d} = \alpha \overrightarrow{i} + \beta \overrightarrow{j}$ un vecteur unitaire avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

1. Proposer une paramétrisation à vitesse constante $d : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2,\ t \longmapsto d(t)$ de la droite $\mathcal{D}$ passant par A_0 et dirigée par $\overrightarrow{d}$.
2. En déduire une paramétrisation $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3,\ t \longmapsto \gamma(t)$ de la courbe Γ contenue dans $\mathcal{S}$, dont la projection dans le plan (Oxy) est $t \mapsto d(t)$.
3. En déduire que le vecteur vitesse de la courbe Γ en B_0 est $\overrightarrow{v} = (\alpha, \beta, \overrightarrow{Grad(h)}(A_0)\ \cdot\ \overrightarrow{d})$
4. En déduire que $\|\overrightarrow{v}\|$ est maximal pour $\overrightarrow{d}$ colinéaire à $\overrightarrow{Grad(h)}(A_0)$.
5. Justifier l'affirmation de notre ami(e) physicien(ne) : « Le gradient (de h) dirige la ligne de plus grande pente »

Exercice 20 *Modélisation par moindres carrés*

Etant donné un n échantillon de mesures physiques $((x_i,y_i))_{1\leq i\leq n}$, on cherche à savoir si cet échantillon peut-être assimilé à des réalisations aléatoires de couples $((x_i, ax_i+b))_{1\leq i\leq n}$, pour des paramètres a et b de régression linéaire, selon une relation linéaire de la forme

$$y = ax + b$$

1. Par définition, la droite de régression linéaire associée à ces mesures est la droite d'équation $y = \hat{a}x + \hat{b}$, où $(\hat{a},\hat{b}) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $\delta_n(\hat{a},\hat{b}) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}|^2$ réalise le minimum de la fonction $(a,b) \mapsto \sum_{i=1}^{n} |y_i - ax_i - b|^2$.
2. Justifier que résoudre ce problème revient à minimiser une quantité de la forme
$$(\star) \quad \|MV - Y\|_2^2$$
avec $M \in \mathfrak{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et $W \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.
3. Que dire du projeté orthogonal $\hat{Y}$ de Y sur le sous-espace vectoriel engendré par $\mathrm{Im}(M)$? Etablir que $\hat{Y} = (M^T M)^{-1}\ M^T\ Y$.
4. Justifier que ce maximum est atteint et est unique, à l'aide de la formule de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base orthonormée
5. En déduire que l'équation de la droite des moindres carrées et obtenue pour des paramètres $\hat{a}$ et $\hat{b}$ que l'on explicitera en fonction des (x_i, y_i)

Exercice 21 *Equation des cordes vibrantes*

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (E)$

L'équation (E) appelée équation des ondes unidimensionnelle (ou équation de D'Alembert) décrit le mouvement d'une corde soumise à des vibrations transversales se propageant à une vitesse $c > 0$ le long de la corde (propagation d'une onde transverse le long de l'axe (Ox)). Notons $L > 0$ la longueur de la corde.
On souhaite ainsi résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) d'inconnue u : $\begin{matrix} [0,L]\times\mathbb{R} & \to \mathbb{R} \\ (x,t) & \mapsto u(x,t) \end{matrix}$, de classe $\mathcal{C}^2$ avec conditions initiales $u(0,t) = u(L,t) = 0$.

1) En réalisant le changement de variables $\begin{cases} x = y + s \\ t = \dfrac{-y}{c} + \dfrac{s}{c} \end{cases}$

montrer que $v : (y,s) \mapsto u\left(y+s, \dfrac{-y}{c} + \dfrac{s}{c}\right)$ vérifie l'EDP :

$\dfrac{\partial^2 v}{\partial y \partial s} = 0 \quad (2)$

2) En déduire qu'il existe deux fonctions $g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ telles que v soit de la forme
$v : (y,s) \mapsto g(2y) + h(2s)$
3) En déduire que u est de la forme

$$u : (x,t) \mapsto g(x - ct) + h(x + ct)$$

Exercice 22 ☆☆☆

Soit n un entier strictement positif, $E = \mathbb{R}^n$ muni de sa structure euclidienne canonique, u un vecteur fixé de E , A une matrice symétrique de $\mathfrak{M}_n(R)$ et φ l'endomorphisme de E de matrice A dans la base canonique.

On étudie la fonction f de E dans $\mathbb{R}$ qui à tout vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n)$ associe $f(x) =< x, \varphi(x) > -2 < x, u >$.

1. Ici n=2, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $u = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   Vérifier que $f(x) = 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 10x_1 - 2x_2$. Montrer que $X_0 = (2, 1)$ est un point critique de f.
2. Avec les conditions de la question 1 : soit $h = (h_1, h_2)$. Montrer que $f(X_0 + h) - f(X_0) = ah_1^2 + bh_2^2 + ch_1h_2$ où a, b, c sont trois réels que l'on déterminera. En déduire que f admet un extremum en X_0.
3. On revient au cas général et on suppose de plus que pour tout x non nul de E, $< x, \varphi(x) > > 0$.

   Montrer que les valeurs propres de φ sont strictement positives. En utilisant une base orthonormée de vecteurs propres de φ , montrer que f possède un extremum que l'on précisera.

Notes

[7] correction : $(1,2)$ seul point critique ; $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, le déterminant est $4 > 0$ et la trace $4 > 0$ donc il s'agit d'un minimum local (et global)

[16] correction :

en polaires $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \leq 2r$ donc continue après calcul de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0$