

Méthodes à retenir :

## I. Applications directes du cours

### Exercice 1

Soit  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :

$$f(x, y) = x^2 y^2 - y^4, \text{ et } A = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ fixé.}$$

- Déterminer le gradient de  $f$  en  $A$ . En déduire les extrema éventuels de  $f$ .
- Déterminer la différentielle  $df_A$  de  $f$  en  $A$ .

### Exercice 2

Soient  $g = f \circ \varphi$ , avec  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \mathbb{R}$ , et  $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, \alpha) \mapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$

- Exprimer, pour  $A \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ,  $\frac{\partial g}{\partial r}(A), \frac{\partial g}{\partial \alpha}(A)$  et  $\frac{\partial g}{\partial z}(A)$  à l'aide de  $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(A))$  et  $\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(A))$ .
- Application  $f : (x, y) \mapsto \cos(xy) e^y, A = (1, 2)$ .

## II. Exercices

### Exercice 3

Soit  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

- Déterminer et représenter l'ensemble de définition  $D_f$  de  $f$ . Est-ce un ouvert, un fermé ?
- Déterminer le plus grand ouvert  $\Omega$  de  $\mathbb{R}^2$  sur lequel  $f$  est de classe  $C^1$ .
- Déterminer les éventuels points critiques de  $f$  et les extrema locaux

### Exercice 4

$f$  étant une fonction de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  on définit la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Calculer  $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$  en fonction de  $\frac{\partial g}{\partial r}$  et  $\frac{\partial g}{\partial \theta}$  les dérivées partielles premières de  $g$ .

### Exercice 5

- Rappeler la définition d'un maximum local pour une fonction de deux variables à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .
- Déterminer les éventuels extrema de la fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{R}^2$  par :  $f(x, y) = e^x + e^y + e^{-x-y}$ .

### Exercice 6

$f$  étant une fonction de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$  on définit la fonction  $g$  sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$g(u, v) = f(u + v, u - v)$$

Calculer  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$  en fonction de  $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$  et  $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$  les dérivées partielles secondes de  $g$ .

### Exercice 7

Soit  $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y$

- Justifier que  $f$  est de classe  $C^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .
- Déterminer les points critiques de  $f$ .
- Déterminer la hessienne  $H_f(a)$  de  $f$  en chaque point critique de  $f$ .
- Quels sont les extremums locaux de  $f$  ?

### Exercice 8 ☆☆☆ CCINP PSI

On note  $f$  la fonction  $(x, y) \mapsto x^2 y + \ln(4 + y^2)$ .

- Montrer que  $f$  admet sur  $\mathbb{R}^2$  un unique point critique.
- $f$  admet-elle des extremums locaux ?

### Exercice 9 ☆☆ Mines-Télécom

On considère

$$f : (x, y) \mapsto \arctan x + \arctan y - \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right).$$

- Ensemble de définition  $D_f$  ?
- Continuité ?
- Existence de dérivées partielles ?
- Justifier que les dérivées partielles sont nulles, qu'en déduire sur  $f$  ?

**Exercice 10** ☆

Soit  $U, V$  deux applications de  $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$ . On note  $\langle | \rangle$  le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^2$ .

Montrer que  $\varphi : t \mapsto \langle U(t) | V(t) \rangle$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}$  et calculer sa dérivée.

**Exercice 11**

Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation  $x^2 + 4y^2 = z$  au point  $A = (1; 0; 1)$ .

### III. Exercices avancés

**Exercice 12** ☆☆ *mouvement circulaire*

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  une application dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|f(t)\|^2 = 1.$$

En dérivant cette égalité (justifier), montrer qu'à chaque instant  $t$ , les vecteurs  $f(t)$  et  $f'(t)$  sont orthogonaux.

Proposer une interprétation cinématique.

**Exercice 13** ☆☆☆

Soient  $Y_0 \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ .

On considère l'application

$$\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \mapsto \left\| A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - Y_0 \right\|_2^2.$$

Justifier que  $\delta$  admet des dérivées partielles, et calculer les dérivées partielles de  $\delta$  en  $(a, b)$ , à l'aide de  $a, b, C_1, C_2, Y_0$  et le produit scalaire  $\langle | \rangle$  usuel associé à la norme euclidienne  $\| \cdot \|_2$  sur  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ .

On pourra réécrire  $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = aC_1 + bC_2$ , en notant  $C_1$  et  $C_2$  les colonnes de  $A$ .

**Exercice 14** ☆☆

Soit  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $A$  une matrice symétrique réelle, à valeurs propres positives,  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ , et  $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  dérivable telle que  $X' = AX$ .

Montrer que  $t \mapsto \|X(t)\|_2$  est croissante sur  $I$ .

**Exercice 15** ☆☆☆

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ . Soit  $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, t \mapsto \det(A - tI_n)$

1) Rappeler une formule du cours faisant intervenir  $\varphi(t)$ ,  $\det A$  et  $\text{tr} A$ .

2) Justifier que l'application  $\varphi$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

3) Montrer que  $\varphi$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ , et calculer  $\varphi(0)$  et  $\varphi'(0)$ .

**Exercice 16**

Soit

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ .

2. Justifier que  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

3. Justifier l'existence et calculer  $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$  et

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$ . En déduire que  $f$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $\mathbb{R}^2$ .

**Exercice 17** ☆☆ *CCINP PC*

Soit  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  harmonique c'est-à-dire  $g$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  et  $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$ . 1) Trouver  $a, b$  des réels

tels que  $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{1-t}$ .

2) Résoudre l'équation différentielle  $(1-t^2)y'' - 2ty' = 0$ .

Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable deux fois et  $F = fog$ .

3) Exprimer  $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$  et  $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$ .

4) On suppose que  $f''$  ne s'annule pas. Montrer que  $F$  est harmonique ssi  $g$  est une constante.

Soit  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction dérivable deux fois et  $G(x, y) = h\left(\frac{\cos(x)}{\text{ch}(y)}\right)$ .

5) Déterminer les applications  $h$  telles que  $G$  soit harmonique.

**Exercice 18** *Mines*

Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Trouver les  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$  telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

**Exercice 19** *Ligne de plus grande pente*

Soit  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(x, y) \mapsto h(x, y)$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , et la surface paramétrée  $\mathcal{S} = \{(x, y, h(x, y))\}$ .

Soit  $A_0 = (x_0, y_0)$  un point du plan, et  $B_0 = (x_0, y_0, h(x_0, y_0))$  le point correspondant sur la surface  $\mathcal{S}$ .

Soit  $\vec{d} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$  un vecteur unitaire avec  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ .

- Proposer une paramétrisation à vitesse constante  $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $t \mapsto d(t)$  de la droite  $\mathcal{D}$  passant par  $A_0$  et dirigée par  $\vec{d}$ .
- En déduire une paramétrisation  $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $t \mapsto \gamma(t)$  de la courbe  $\Gamma$  contenue dans  $\mathcal{S}$ , dont la projection dans le plan  $(Oxy)$  est  $t \mapsto d(t)$ .
- En déduire que le vecteur vitesse de la courbe  $\Gamma$  en  $B_0$  est  $\vec{v} = (\alpha, \beta, \overrightarrow{Grad(h)}(A_0) \cdot \vec{d})$
- En déduire que  $\|\vec{v}\|$  est maximal pour  $\vec{d}$  colinéaire à  $\overrightarrow{Grad(h)}(A_0)$ .
- Justifier l'affirmation de notre ami(e) physicien(ne) :  
« Le gradient (de  $h$ ) dirige la ligne de plus grande pente »

**Exercice 20** *Modélisation par moindres carrés*

Etant donné un  $n$  échantillon de mesures physiques  $((x_i, y_i))_{1 \leq i \leq n}$ , on cherche à savoir si cet échantillon peut-être assimilé à des réalisations aléatoires de couples  $((x_i, ax_i + b))_{1 \leq i \leq n}$ , pour des paramètres  $a$  et  $b$  de régression linéaire, selon une relation linéaire de la forme

$$y = ax + b$$

- Par définition, la droite de régression linéaire associée à ces mesures est la droite d'équation  $y = \hat{a}x + \hat{b}$ , où  $(\hat{a}, \hat{b}) \in \mathbb{R}^2$  est tel que  $\delta_n(\hat{a}, \hat{b}) = \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}|^2$  réalise le minimum de la fonction  $(a, b) \mapsto \sum_{i=1}^n |y_i - ax_i - b|^2$ .
- Justifier que résoudre ce problème revient à minimiser une quantité de la forme

$$(*) \quad \|MV - Y\|_2^2$$

avec  $M \in \mathfrak{M}_{n,2}(\mathbb{R})$   $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ , et  $W \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$  à préciser.

- Que dire du projeté orthogonal  $\hat{Y}$  de  $Y$  sur le sous-espace vectoriel engendré par  $\text{Im}(M)$ ? Etablir que  $\hat{Y} = (M^T M)^{-1} M^T Y$ .
- Justifier que ce maximum est atteint et est unique, à l'aide de la formule de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base orthonormée
- En déduire que l'équation de la droite des moindres carrés et obtenue pour des paramètres  $\hat{a}$  et  $\hat{b}$  que l'on explicitera en fonction des  $(x_i, y_i)$

**Exercice 21** *Equation des cordes vibrantes*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (E)$$

L'équation (E) appelée équation des ondes unidimensionnelle (ou équation de D'Alembert) décrit le mouvement d'une corde soumise à des vibrations transversales se propageant à une vitesse  $c > 0$  le long de la corde (propagation d'une onde transverse le long de l'axe  $(Ox)$ ). Notons  $L > 0$  la longueur de la corde.

On souhaite ainsi résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) d'inconnue  $u : \begin{matrix} [0, L] \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & u(x, t) \end{matrix}$ , de

classe  $\mathcal{C}^2$  avec conditions initiales  $u(0, t) = u(L, t) = 0$ .

- En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} x = y + s \\ t = \frac{-y}{c} + \frac{s}{c} \end{cases}$$

montrer que  $v : (y, s) \mapsto u\left(y + s, \frac{-y}{c} + \frac{s}{c}\right)$  vérifie

$$\text{l'EDP : } \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial s} = 0 \quad (2)$$

- En déduire qu'il existe deux fonctions  $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que  $v$  soit de la forme

$$v : (y, s) \mapsto g(2y) + h(2s)$$

- En déduire que  $u$  est de la forme

$$u : (x, t) \mapsto g(x - ct) + h(x + ct)$$

# Notes

<sup>7</sup> correction :  $(1, 2)$  seul point critique ;  $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ , le déterminant est  $4 > 0$  et la trace  $4 > 0$  donc il s'agit d'un minimum local (et global)

<sup>16</sup> correction :

en polaires  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \leq 2r$  donc continue après calcul de  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$