

Méthodes à retenir :

I. Applications directes du cours

Exercice 1

Soit f définie sur \mathbb{R}^2 par :

$$f(x, y) = x^2 y^2 - y^4, \text{ et } A = (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2 \text{ fixé.}$$

- Déterminer le gradient de f en A . En déduire les extrema éventuels de f .
- Déterminer la différentielle df_A de f en A .

Exercice 2

Soient $g = f \circ \varphi$, avec $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \mathbb{R}$, et $\varphi : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, (r, \alpha) \mapsto (r \cos \alpha, r \sin \alpha)$

- Exprimer, pour $A \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $\frac{\partial g}{\partial r}(A), \frac{\partial g}{\partial \alpha}(A)$ et $\frac{\partial g}{\partial z}(A)$ à l'aide de $\frac{\partial f}{\partial x}(\varphi(A))$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(\varphi(A))$.
- Application $f : (x, y) \mapsto \cos(xy) e^y, A = (1, 2)$.

II. Exercices

Exercice 3

Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}.$$

- Déterminer et représenter l'ensemble de définition D_f de f . Est-ce un ouvert, un fermé ?
- Déterminer le plus grand ouvert Ω de \mathbb{R}^2 sur lequel f est de classe C^1 .
- Déterminer les éventuels points critiques de f et les extrema locaux

Exercice 4

f étant une fonction de classe C^1 sur \mathbb{R}^2 on définit la fonction g sur \mathbb{R}^2 par

$$g(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$$

Calculer $x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ en fonction de $\frac{\partial g}{\partial r}$ et $\frac{\partial g}{\partial \theta}$ les dérivées partielles premières de g .

Exercice 5

- Rappeler la définition d'un maximum local pour une fonction de deux variables à valeurs dans \mathbb{R} .
- Déterminer les éventuels extrema de la fonction f définie sur \mathbb{R}^2 par : $f(x, y) = e^x + e^y + e^{-x-y}$.

Exercice 6

f étant une fonction de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 on définit la fonction g sur \mathbb{R}^2 par

$$g(u, v) = f(u + v, u - v)$$

Calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ en fonction de $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}, \frac{\partial^2 g}{\partial u^2}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}$ les dérivées partielles secondes de g .

Exercice 7

Soit $f : (x, y) \mapsto x^2 + y^2 - 2x - 4y$

- Justifier que f est de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 .
- Déterminer les points critiques de f .
- Déterminer la hessienne $H_f(a)$ de f en chaque point critique de f .
- Quels sont les extremums locaux de f ?

Exercice 8 ☆☆☆ CCINP PSI

On note f la fonction $(x, y) \mapsto x^2 y + \ln(4 + y^2)$.

- Montrer que f admet sur \mathbb{R}^2 un unique point critique.
- f admet-elle des extremums locaux ?

Exercice 9 ☆☆ Mines-Télécom

On considère

$$f : (x, y) \mapsto \arctan x + \arctan y - \arctan\left(\frac{x + y}{1 - xy}\right).$$

- Ensemble de définition D_f ?
- Continuité ?
- Existence de dérivées partielles ?
- Justifier que les dérivées partielles sont nulles, qu'en déduire sur f ?

Exercice 10 ☆

Soit U, V deux applications de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}^2)$. On note $\langle | \rangle$ le produit scalaire usuel sur \mathbb{R}^2 .

Montrer que $\varphi : t \mapsto \langle U(t) | V(t) \rangle$ est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R} et calculer sa dérivée.

Exercice 11

Déterminer une équation cartésienne du plan tangent à la surface d'équation $x^2 + 4y^2 = z$ au point $A = (1; 0; 1)$.

III. Exercices avancés

Exercice 12 ☆☆ *mouvement circulaire*

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ une application dérivable telle que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \|f(t)\|^2 = 1.$$

En dérivant cette égalité (justifier), montrer qu'à chaque instant t , les vecteurs $f(t)$ et $f'(t)$ sont orthogonaux.

Proposer une interprétation cinématique.

Exercice 13 ☆☆☆

Soient $Y_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $A \in \mathfrak{M}_{n,2}(\mathbb{R})$.

On considère l'application

$$\delta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (a, b) \mapsto \left\| A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} - Y_0 \right\|_2^2.$$

Justifier que δ est admet des dérivées partielles, et calculer les dérivées partielles de δ en (a, b) , à l'aide de a, b, C_1, C_2, Y_0 et le produit scalaire $\langle | \rangle$ usuel associé à la norme euclidienne $\| \cdot \|_2$ sur $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

On pourra réécrire $A \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = aC_1 + bC_2$, en notant C_1 et C_2 les colonnes de A .

Exercice 14 ☆☆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, A une matrice symétrique réelle, à valeurs propres positives, I un intervalle de \mathbb{R} , et $X : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable telle que $X' = AX$.

Montrer que $t \mapsto \|X(t)\|_2$ est croissante sur I .

Exercice 15 ☆☆☆

Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Soit $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $t \mapsto \det(A - tI_n)$

1) Rappeler une formule du cours faisant intervenir $\varphi(t)$, $\det A$ et $\text{tr } A$.

2) Justifier que l'application φ est continue sur \mathbb{R} .

3) Montrer que φ est dérivable sur \mathbb{R} , et calculer $\varphi(0)$ et $\varphi'(0)$.

Exercice 16

Soit

$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

1. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

2. Justifier que f est de classe \mathcal{C}^1 sur \mathbb{R}^2 .

3. Justifier l'existence et calculer $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)$ et

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$. En déduire que f n'est pas de classe \mathcal{C}^2 sur \mathbb{R}^2 .

Exercice 17 ☆☆ *CCINP PC*

Soit $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ harmonique c'est-à-dire g est de classe \mathcal{C}^2 et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} = 0$. 1) Trouver a, b des réels

tels que $\frac{1}{1-t^2} = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{1-t}$.

2) Résoudre l'équation différentielle $(1-t^2)y'' - 2ty' = 0$.

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $F = fog$.

3) Exprimer $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

4) On suppose que f'' ne s'annule pas. Montrer que F est harmonique ssi g est une constante.

Soit $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dérivable deux fois et $G(x, y) = h\left(\frac{\cos(x)}{\text{ch}(y)}\right)$.

5) Déterminer les applications h telles que G soit harmonique.

Exercice 18 *Mines*

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Trouver les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{+*}, \mathbb{R})$ telles que

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = \alpha f$$

Exercice 19 *Ligne de plus grande pente*

Soit $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto h(x, y)$ de classe \mathcal{C}^1 , et la surface paramétrée $\mathcal{S} = \{(x, y, h(x, y))\}$.

Soit $A_0 = (x_0, y_0)$ un point du plan, et $B_0 = (x_0, y_0, h(x_0, y_0))$ le point correspondant sur la surface \mathcal{S} .

Soit $\vec{d} = \alpha \vec{i} + \beta \vec{j}$ un vecteur unitaire avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Proposer une paramétrisation à vitesse constante $d : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $t \mapsto d(t)$ de la droite \mathcal{D} passant par A_0 et dirigée par \vec{d} .
- En déduire une paramétrisation $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \gamma(t)$ de la courbe Γ contenue dans \mathcal{S} , dont la projection dans le plan (Oxy) est $t \mapsto d(t)$.
- En déduire que le vecteur vitesse de la courbe Γ en B_0 est $\vec{v} = (\alpha, \beta, \overrightarrow{Grad(h)}(A_0) \cdot \vec{d})$
- En déduire que $\|\vec{v}\|$ est maximal pour \vec{d} colinéaire à $\overrightarrow{Grad(h)}(A_0)$.
- Justifier l'affirmation de notre ami(e) physicien(ne) :
« Le gradient (de h) dirige la ligne de plus grande pente »

Exercice 20 *Modélisation par moindres carrés*

Etant donné un n échantillon de mesures physiques $((x_i, y_i))_{1 \leq i \leq n}$, on cherche à savoir si cet échantillon peut-être assimilé à des réalisations aléatoires de couples $((x_i, ax_i + b))_{1 \leq i \leq n}$, pour des paramètres a et b de régression linéaire, selon une relation linéaire de la forme

$$y = ax + b$$

- Par définition, la droite de régression linéaire associée à ces mesures est la droite d'équation $y = \hat{a}x + \hat{b}$, où $(\hat{a}, \hat{b}) \in \mathbb{R}^2$ est tel que $\delta_n(\hat{a}, \hat{b}) = \sum_{i=1}^n |y_i - \hat{a}x_i - \hat{b}|^2$ réalise le minimum de la fonction $(a, b) \mapsto \sum_{i=1}^n |y_i - ax_i - b|^2$.
- Justifier que résoudre ce problème revient à minimiser une quantité de la forme

$$(*) \quad \|MV - Y\|_2^2$$

avec $M \in \mathfrak{M}_{n,2}(\mathbb{R})$ $V = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{2,1}(\mathbb{R})$, et $W \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ à préciser.

- Que dire du projeté orthogonal \hat{Y} de Y sur le sous-espace vectoriel engendré par $\text{Im}(M)$? Etablir que $\hat{Y} = (M^T M)^{-1} M^T Y$.
- Justifier que ce maximum est atteint et est unique, à l'aide de la formule de projection sur un sous-espace vectoriel de dimension finie, muni d'une base orthonormée
- En déduire que l'équation de la droite des moindres carrés et obtenue pour des paramètres \hat{a} et \hat{b} que l'on explicitera en fonction des (x_i, y_i)

Exercice 21 *Equation des cordes vibrantes*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \quad (E)$$

L'équation (E) appelée équation des ondes unidimensionnelle (ou équation de D'Alembert) décrit le mouvement d'une corde soumise à des vibrations transversales se propageant à une vitesse $c > 0$ le long de la corde (propagation d'une onde transverse le long de l'axe (Ox)). Notons $L > 0$ la longueur de la corde.

On souhaite ainsi résoudre l'équation aux dérivées partielles (E) d'inconnue $u : \begin{matrix} [0, L] \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, t) & \mapsto & u(x, t) \end{matrix}$, de

classe \mathcal{C}^2 avec conditions initiales $u(0, t) = u(L, t) = 0$.

- En réalisant le changement de variables

$$\begin{cases} x = y + s \\ t = \frac{-y}{c} + \frac{s}{c} \end{cases}$$

montrer que $v : (y, s) \mapsto u\left(y + s, \frac{-y}{c} + \frac{s}{c}\right)$ vérifie

$$\text{l'EDP : } \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial s} = 0 \quad (2)$$

- En déduire qu'il existe deux fonctions $g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 telles que v soit de la forme

$$v : (y, s) \mapsto g(2y) + h(2s)$$

- En déduire que u est de la forme

$$u : (x, t) \mapsto g(x - ct) + h(x + ct)$$

Notes

⁷ correction : $(1, 2)$ seul point critique ; $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, le déterminant est $4 > 0$ et la trace $4 > 0$ donc il s'agit d'un minimum local (et global)

¹⁶ correction :

en polaires $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \leq 2r$ donc continue après calcul de $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$