Méthodes à retenir :

- Si $\sum a_n x^n$ converge, alors le rayon de convergence R vérifie : $R \geq |x|$.
- Si $\sum a_n x^n$ diverge, alors le rayon de convergence R vérifie : $R \leq |x|$.
- Pour déterminer le rayon de convergence, on peut appliquer la règle de d'Alembert vue pour les séries numériques, en posant, pour $z \neq 0$: $\alpha_n = |a_n z^n|$, puis en discutant selon les valeurs de z.
- Une fonction f DSE est paire (resp. impaire) si et seulement si le DSE de f ne contient que des puissances paires (resp.impaires).
- Pour trouver l'unique solutions DSE de l' équation différentielle linéaire $a(t)y' + c(t)y = d(t)$, avec la condition initiael $y(t_0) = y_0 \in \mathbb{R}$, lorsque a ne s'annule pas , a, b c sont continues sur I intervalle,

  – on suppose (analyse) qu'il existe $r > 0$ et $(a_n) \in \mathbb{C}^n$ tels que $y : t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n$ est définie sur $]-r, r[$ et solution de l'équation différentielle ; puis on effectue des regroupements de coefficients et changements d'indices pour réécrire cette équation sous la forme $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n = \sum_{n=0}^{+\infty} 0 t^n$; à l'aide de l'unicité du DSE, on en déduit que les c_n sont tous nuls, ce qui permet de trouver une relation de récurrence permettant de préciser la suite (a_n).

  – on vérifie alors (synthèse) que pour de telles suites le rayon de convergence associé est effectivement strictement positive.
- Cette méthode fonctionne sur des équations différentielles d'ordre 2 ou plus, l'unicité de la solution d'un problème de Cauchy doit être explicitement admise dans les énoncés.

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆

Donner le rayon de convergence et la somme des séries entières :

a) $\sum_{n\geq 0} 2^n z^n$;

b) $\sum_{n\geq 1} (n+1) z^n$;

c) $\sum_{n\geq 0} \mathrm{e}^{-n} z^n$;

Exercice 2 ☆

Développer en série entière sur un voisinage de l'origine $]-a, a[$, la fonction $g : x \mapsto \dfrac{1}{1-x^5}$.

Exercice 3 ☆☆

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière $\sum_{n\geq 1} \dfrac{x^{3n}}{3n}$.

Exercice 4 ☆☆

Soit $x \in]-1, 1[$.

1. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{x^n}{n} = -\ln(1-x)$, et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n 2^n}$;
2. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} n x^n = \dfrac{x}{(1-x)^2}$, et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n}{2^n}$;
3. Montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^n = \dfrac{2x^2}{(1-x)^3} + \dfrac{x}{(1-x)^2}$, et calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$;

II. A savoir rédiger

Exercice 5 ☆☆

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 1} \mathrm{ch}(n)\ x^n$

Exercice 6 ☆☆ *CCP PSI*

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum \frac{3n}{n+2} x^n$ puis calculer sa somme.

Exercice 7

Déterminer toutes les solutions développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$, pour $r > 0$ de l'équation différentielle :

$$y' + 2x^2 y = \mathrm{e}^x \quad (E)$$

avec la condition initiale $y(0) = 1$

III. Exercices

Exercice 8 ☆☆

Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$, avec $a_n =$:

a) $\frac{1}{\sqrt{n}}$; b) $\frac{n^n}{e^n n!}$;c) $\frac{\ln n}{1+\ln n}$; d) $\begin{cases} (-1)^n \text{ si } n \text{ pair} \\ \frac{1}{2^n} \text{ si } n \text{ impair} \end{cases}$;

e) $\frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$; f) $e^{\mathrm{i}n\theta}$, pour $\theta \in \mathbb{R}$ fixé ;

Exercice 9 ☆☆

Déterminer le rayon de convergence et la somme de la série entière de terme général $\frac{(-1)^n x^{2n}}{2n(2n-1)}$.

IV. Pour aller plus loin

Exercice 10

Déterminer toutes les solutions développable en série entière sur un intervalle $]-r, r[$, pour $r > 0$ de l'équation différentielle :

$$4xy'' + 2y' - y = 0 \quad (E)$$

avec la condition initiale $y(0) = a$ et $y'(0) = b$, pour $a, b \in \mathbb{R}$ fixés.

Exercice 11 ☆☆☆

1. Justifier que l'on a :

$$\forall x \in [0, 1[,\ \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$$

2. Montrer que la série entière

$$\sum_{n\geq 0} \left(\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right)$$

converge simplement sur $[0, 1]$.

3. calculer la somme S de cette série.
4. La convergence de la série de fonctions est-elle uniforme sur $[0, 1]$?

Exercice 12 ☆☆☆

Trouver toutes les solutions développables en série entière sur un voisinage $]-a, a[$ de 0 de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}) \quad 2x\ y'' + y' - y = 0$$

Exercice 13 ☆☆☆

Soient $a_0 = 1$ et $b_0 = 1$.

On définit deux suites (a_n) et (b_n) en posant : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 2b_n$ et $b_{n+1} = 3a_n$.

Déterminer les rayons de convergences et sommes des séries $\sum_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n z^n$.

Exercice 14 ☆☆☆☆

Trouver le rayon de convergence de la série entière réelle $\sum_{n\geq 0} \frac{x^{3n}}{(3n)!}$ et sa somme en cherchant une équation différentielle du 3e ordre qu'elle vérifie.

Exercice 15

On considère l'équation différentielle :
$(E) \quad xy" + 3y' - 4x^3y = 0.$

1. Si F est une solution de (E) développable en série entière sur un voisinage $I =]-a, a[$ de 0 (avec $a > 0$), on note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ telle que pour tout $x \in I$:
$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$
Déterminer une relation de récurrence vérifiée par la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Exprimer $F(0)$ et $F'(0)$ à l'aide des éléments de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire qu'il existe une unique solution F développable en série entière au voisinage de 0 de l'équation (E) qui vérifie $F(0) = 1$ et $F'(0) = 0$.
4. Quel est son rayon de convergence ?

Exercice 16 ☆☆☆ *Mines-Ponts PC*

Pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on pose $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n}\,\mathrm{d}t$

1. Déterminer la limite de (I_n).
2. Donner un équivalent de (I_n).
3. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière de terme général $I_n x^n$. Etudier sa convergence en R et en $-R$.

Exercice 17 ☆☆☆ ☆

Soient $I =]-1,1[$ et $f : x \longmapsto (\text{Arcsin}\, x)^2$.

1. Rappeler le développement en série entière de Arcsin sur I, et justifier que f y est développable en série entière.

2. Montrer que : $\forall x \in I,\ (1-x^2)f'(x)^2 = 4f(x)$

3. En dérivant, justifier que f est solution sur I de l'équation différentielle : $(E)\ (1-x^2)y''-xy' = 2$

4. On note $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les coefficients du DSE de f sur I.

   (a) montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N},\ (n+1)(n+2)a_{n+2} - n^2 a_n = 0.$

   (b) Calculer $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$ et en déduire a_0, a_1, a_2.

   (c) En déduire que :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\ a_{2n+1} = 0,\ a_{2n} = \frac{2^{2n-2}((n-1)!)^2}{n\ (2n-1)!}$$

5. En déduire le développement en série entière de f sur I. Vérifier qu'il est constitué de puissances paires.

Exercice 18 ☆☆☆ *Série de Hadamard*

Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R'.

1. Justifier que le rayon de convergence R'' de la série entière $\sum a_n b_n z^n$ vérifie l'inégalité : $R'' \geq RR'$

2. A l'aide des séries entières $\sum z^{2n}$ et $\sum z^{2n+1}$, justifiez que l'inégalité peut être stricte.

Exercice 19 ☆☆☆

Soient $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^n$ et $\sum\limits_{n\geq 0} b_n z^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R et R', justifier que :
1) s'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N,\ |a_n| \leq |b_n|$, alors $R' \leq R$.
2) a) comparer R etR' lorsque $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$;
b) montrer que $\sum\limits_{n\geq 0} a_n b_n z^n$ a un rayon de convergence R" tel que R" $\geq RR'$;
c) montrer que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n^3 z^n$ est R^3 ;
d) montrer que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geq 0} a_n z^{2n}$ est $\sqrt{R}$;

Exercice 20 ☆☆☆ *Mines-Ponts PC*

On pose $a_0 = 1$, et $\forall n \in \mathbb{N},\ a_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} a_k$
Calculer les a_n en utilisant la série entière de terme général $\dfrac{a_n}{n!}x^n$.

Exercice 21

Déterminer toutes les fonctions f développables en série entière et solutions de l'équation différentielle :

$$xy''(x) - y(x) = 0$$

Exercice 22

Soit
$$f : x \mapsto \frac{\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$$

1. Déterminer un intervalle I ouvert contenant 0 le plus grand possible sur lequel f peut être définie.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire (E) d'ordre 1.
3. Déterminer les solutions développables en série entière de cette équation différentielle.
4. En déduire que f est développable en série entière au voisinage de 0 et préciser les coefficients de son développement en série entière.

Exercice 23

Former le développement en série entière de

$$f : x \mapsto \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$$

Notes

[1] correction :

[2] correction :

[5] correction : A l'aide de la règle de d'Alembert pour des séries numériques

[10] correction : $a_{m+1} = \dfrac{a_m}{(m+1)(m+2)}$, $\forall m \geq 0$, puis $a_n = \dfrac{a_0}{n!(n+1)!}$, $\forall n \geq 0$.

Puis $y : x \longmapsto \sum \dfrac{x^n}{n!(n+1)!}$ et r ;c.v. $R = +\infty$.

$z'(x) = \dfrac{f'(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$, $z''(x) = \dfrac{f''(\sqrt{x})}{4x} + \dfrac{-f'(\sqrt{x})}{4x\sqrt{x}}$

d'où $f'' - f = 0$, on peut prendre $z : x \longmapsto \lambda\cos(\sqrt{x}) + \mu\sin(\sqrt{x})$.

$\mathcal{S}_E = \{x \longmapsto \alpha y(x) + \beta z(x)\}$

[12] correction : $y(x) = C1 * sinh(sqrt(x) * sqrt(2)) + C2 * cosh(sqrt(x) * sqrt(2))$

[13] correction :

[14] correction :

[15] correction :

[16] correction :

a) TCD avec $e^{-t^n} \leq e^{-t}$ b) CDV $u = t^n$, $I_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^{+\infty} u^{(1-n)/n} e^{-u}\mathrm{d}u$ et TCD $\displaystyle\int_1^{+\infty} u^{(1-n)/n} e^{-u}\mathrm{d}u \xrightarrow{} \int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u$ donc $I_n \sim \dfrac{1}{n}\displaystyle\int_1^{+\infty} \dfrac{e^{-u}}{u}\mathrm{d}u$ c) $R = 1$ par d'Alembert, et la série diverge en 1. Le CSSA donne la convergence en -1.

[20] correction : On pose $b_n = \dfrac{a_n}{n!}$ R le RCV de $\sum b_n z^n$. On a $b_0 = 1$ et $(n+1)b_{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} b_{n-k}b_k$;

On a $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 6$. et $b_0 = b_1 = b_2 = b_3 = 1$

$b_n = 1$ pour tout n est une suite qui convient donc c'est elle et $a_n = n!$.

[22] correction :

1. f définie sur $]-1,1[$ et y est DSE comme produit de telles fonctions.
2. $(x^2-1)y' + xy - 1 = 0$
3. $-(a_1+1) + \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(na_{n-1} + (n+1)a_{n+1})x^n = 0$

   $a_0 = f(0) = \pi/2$ $a_{2p} = \dfrac{(2p)!}{(2^p p!)^2}\dfrac{\pi}{2}$ $a_1 = -1$ $a_{2q+1} = -\dfrac{(2^q q!)^2}{(2q+1)!}$
4. f est DSE sur $]-1,1[$ comme produit de telles fonctions !

[23] correction :

$f(x) = (1+x)(1-x^2)^{-1/2} = (1+x)\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}x^{2n}$ pour tout $x \in]-1,1[$.