Table des matières

Pré-requis

Objectifs

I. Variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$

I.1 fonction génératrice

Définition 1 (fonction génératrice d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$).

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On appelle fonction génératrice la fonction G_X définie par :

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(X = n)\ t^n$$

Le rayon de convergence est au moins égal à 1.

Remarque 1. La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.
en effet, le r.c.v. est > 0 donc par unicité du DSE, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbf{P}[X = n] = \dfrac{G_X^{(n)}(0)}{n!}$

Proposition 1.

G_X CVN sur $[-1, 1]$, y est continue, et le rcv est ≥ 1.

Proposition 2.

La variable aléatoire X admet une espérance $\mathbb{E}(X)$ si et seulement si G_X est dérivable en 1 et, si tel est le cas, $\mathbb{E}(X) = G'_X(1)$.

Démonstration non exigible.

Proposition 3.

La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1.
Si tel est le cas, $\boxed{G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)}$

Démonstration non exigible.

Remarque 2. On obtient les expressions de $\mathbb{V}(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et de $G''_X(1)$ en cas d'existence :
$G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$, $G''_X(1) = \mathbb{E}(X(X-1)) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)$, d'où

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X(X-1)) + \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)^2$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \sum_k (k - \mathbb{E}[X])^2\ \mathbf{P}(\{X = k\})$$

$$\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2 = \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - (\mathbb{E}[X])^2 = \boxed{G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}$$

Proposition 4.

Si X admet une variance, alors $\mathbb{V}[X] = \boxed{G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2}$

Transfert et dérivations terme à terme successives des fonctions génératrices

Proposition 5.

La loi d'une v.a. X a valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.

Par unicité du DSE :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \mathbb{P}[X = k] = \frac{G_X^{(k)}(0)}{k!}.$$

Proposition 6.

Si X et Y sont deux v.a. **indépendantes**, alors $G_{X+Y} = G_X \times G_Y$

dém : par indépendance de t^X et t^Y, $\mathbb{E}[t^{X+Y}] = \mathbb{E}[t^X]\mathbb{E}[t^Y]$

I.2 Loi géométrique

Définition 2.

On appelle loi géométrique de paramètre réel p la loi, notée $\mathcal{G}eom(p)$, définie pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ par :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}(\{X = k\}) = (1-p)^{k-1}p$$

C'est la loi du premier succès dans une épreuve de Bernoulli dont la probabilité de succès est p

Proposition 7.

Pour X de loi $\mathcal{G}(p)$, on a :

$\mathbb{E}[X] = \dfrac{1}{p}$

$\mathbb{V}[X] = \dfrac{1-p}{p^2}$

$G_X(t) = \dfrac{pt}{1-(1-p)t}$

démonstration : La série $\sum_k k^2 p(1-p)^{k-1}$ converge, car son terme général est un $o(k^{-2})$.

$G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} t^k\ p(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p}\sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)t)^k = \frac{p}{1-p}\ \frac{(1-p)t}{1-(1-p)t} = \frac{pt}{1-(1-p)t}$

$G'_X(t) = \frac{p}{(1-(1-p)t)^2}$

$G''_X(t) = \frac{2p(1-p)}{(1-(1-p)t)^3}$

Donc

$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = \frac{1}{p}$

$\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \frac{2(1-p)}{p} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$ □

I.3 Loi de Poisson

Définition 3.

On appelle loi de Poisson de paramètre réel λ la loi, notée $\mathcal{P}(\lambda)$ définie pour $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ par :

$$\mathbf{P}(\{X = k\}) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$$

Proposition 8.

Pour X de loi $\mathcal{P}(\lambda)$, on a :

$\mathbb{E}[X] = \lambda$

$\mathbb{V}[X] = \lambda$

$G_X(s) = e^{\lambda(s-1)}$

démonstration :

La série $\sum_k k^2 \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$ converge, car son terme général est un $o(k^{-2})$.

$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} t^k\ \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty} t^k\ \frac{(\lambda t)^k}{k!} = e^{-\lambda}e^{\lambda t} = e^{\lambda(t-1)}$

$G'_X(t) = \lambda e^{\lambda(t-1)}$

$G''_X(t) = \lambda^2 e^{\lambda(t-1)}$

Donc

$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = \lambda$

$\mathbb{V}[X] = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2 = \lambda^2 + \lambda - (\lambda)^2 = \lambda$ □

Remarque 3 (additivité de poissons indépendantes). Si $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\mu)$ sont deux v.a. indépendantes, alors $X + Y \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda + \mu)$

en effet : $\mathrm{e}^{\lambda(t-1)}\mathrm{e}^{\mu(t-1)} = \mathrm{e}^{(\lambda+\mu)(t-1)}$, et la fonction génératrice caractérise la loi.

I.4 Loi Binomiale

Définition 4.

On appelle loi Binomiale de paramètres $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ réel, la loi notée $\boxed{\mathcal{B}(N,p)}$ définie pour $S \hookrightarrow \mathcal{B}(N,p)$ par :

$$\mathbf{P}(\{S=k\}) = \binom{N}{k}(1-p)^{N-k}p^k, \text{ pour tout } k \in [\![0,N]\!]$$

Proposition 9.

Pour S de loi $\mathcal{B}(N,p)$, on a :
$\mathbb{E}[S] = Np$
$\mathbb{V}[S] = Np(1-p)$
$G_S(s) = (1-p+ps)^N$

démonstration :

On calcule la somme finie $G_S(t) = \sum_{k=0}^{N} t^k \binom{N}{k}(1-p)^{N-k}p^k = \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k}(1-p)^{N-k}(pt)^k = (1-p+pt)^N$

$G'_S(t) = Np(1-p+pt)^{N-1}$
$G''_S(t) = Np((N-1)p)(1-p+pt)^{N-2}$ (pour $N \geq 2$)
Donc
$\mathbb{E}[S] = G'_S(1) = Np$
$\mathbb{V}[S] = G''_S(1) + G'_S(1) - (G'_S(1))^2 = N(N-1)p^2 + Np - N^2p^2 = Np - Np^1 = Np(1-p)$ $\square$

Nouveau Programme PC 2022 :

C - Espérance et variance

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espérance d'une variable aléatoire discrète réelle ou complexe	
Espérance d'une variable aléatoire à valeurs dans $[0,+\infty]$, définie par $$\mathrm{E}(X)=\sum_{x\in X(\Omega)} xP(X=x).$$	On adopte la convention $xP(X=x)=0$ lorsque $x=+\infty$ et $P(X=+\infty)=0$.
Variable aléatoire X à valeurs réelles ou complexes d'espérance finie, espérance de X.	X est d'espérance finie si la famille $\big(xP(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas, la somme de cette famille est l'espérance de X. Variable centrée.
Pour X variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, relation : $$\mathrm{E}(X)=\sum_{n=1}^{+\infty} P(X\geqslant n).$$	
Espérance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Formule de transfert : $f(X)$ est d'espérance finie si et seulement si la famille $\big(f(x)P(X=x)\big)_{x\in X(\Omega)}$ est sommable. Dans ce cas : $$\mathrm{E}\Big(f(X)\Big)=\sum_{x\in X(\Omega)} f(x)P(X=x).$$	On remarque que la formule s'applique aux couples, aux n-uplets de variables aléatoires.
Linéarité de l'espérance. Si $\lvert X\rvert\leqslant Y$ et $\mathrm{E}(Y)<+\infty$, alors X est d'espérance finie. Positivité, croissance de l'espérance. Si X est positive et d'espérance nulle, alors $(X=0)$ est presque sûr.	
Pour X et Y deux variables aléatoires indépendantes d'espérance finie, alors XY est d'espérance finie et : $$\mathrm{E}(XY)=\mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y).$$	Extension au cas de n variables aléatoires.
b) Variance d'une variable aléatoire discrète réelle, écart type et covariance	
Si X^2 est d'espérance finie, X est d'espérance finie.	

Contenus	Capacités & Commentaires
Inégalité de Cauchy-Schwarz : si X^2 et Y^2 sont d'espérance finie, alors XY l'est aussi et : $$\mathrm{E}(XY)^2 \leqslant \mathrm{E}(X^2)\,\mathrm{E}(Y^2)$$	Cas d'égalité.
Variance, écart type.	Notations $\mathrm{V}(X)$, $\sigma(X)$. Variable réduite.
Relation $\mathrm{V}(X) = \mathrm{E}(X^2) - \mathrm{E}(X)^2$.	
Relation $\mathrm{V}(aX + b) = a^2\,\mathrm{V}(X)$.	Si $\sigma(X) > 0$, la variable $\dfrac{X - \mathrm{E}(X)}{\sigma(X)}$ est centrée réduite.
Variance d'une variable géométrique, de Poisson.	
Covariance de deux variables aléatoires. Relation $\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{E}(XY) - \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$, cas de deux variables indépendantes. Variance d'une somme finie, cas de variables deux à deux indépendantes.	

c) Fonctions génératrices

Contenus	Capacités & Commentaires
Fonction génératrice de la variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$: $$G_X(t) = \mathrm{E}\left(t^X\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X = n)t^n.$$	La série entière définissant G_X est de rayon $\geqslant 1$ et converge normalement sur $[-1, 1]$. Continuité de G_X. Les étudiants doivent savoir calculer rapidement la fonction génératrice d'une variable aléatoire de Bernoulli, binomiale, géométrique, de Poisson.
La loi d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ est caractérisée par sa fonction génératrice G_X.	
La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si G_X est dérivable en 1 ; dans ce cas $\mathrm{E}(X) = {G_X}'(1)$.	La démonstration de la réciproque n'est pas exigible. Utilisation de G_X pour calculer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$.
Fonction génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$.	Extension au cas d'une somme finie de variables aléatoires indépendantes.