Méthodes à retenir :

- $G_X : t \longmapsto \mathbb{E}[t^X] = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}[X=n]\, t^n$ est définie sur $[-1,1]$ au moins.
- Si le rayon de convergence de la série génératrice G_X de X variable aléatoire est $R > 1$, alors X admet des moments à tout ordre k , et $\mathbb{E}[X] = G'_X(1)$, $\mathbb{E}[X(X-1)] = G''_X(1)$, $\mathbb{E}[X(X-1)(\dots)(X-k+1)] = G_X^{(k)}(1)$,

I. Applications directes du cours

Exercice 1 ☆

A partir la fonction génératrice d'une variable X suivant la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$, déterminer $\mathrm{E}(X)$, $\mathrm{E}(X^2)$, et $\mathrm{V}(X)$.

II. Exercices

Exercice 2 ☆☆

Soient $\lambda, \mu > 0$. On note X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{P}(\lambda)$ et $\mathcal{P}(\lambda)$.

1. A l'aide du théorème de transfert, justifier que $G_X(t) = \mathbb{E}[t^X]$ et rappeler l'expression de $G_X(t)$ pour $t \in \mathbb{R}$.
2. Calculer G_{X+Y} et en déduire la loi de $X+Y$.
3. On note $(X_1, \dots, X_n$ n v.a.i..d. de loi $\mathcal{P}(\lambda)$. On pose $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ et $T_n = \dfrac{S_n}{\sqrt{n\lambda}}$
   (a) Déterminer le loi de S_n, son espérance et sa variance.
   (b) En déduire l'espérance et la variance de T_n.

Exercice 3 ☆☆

Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. On note X et Y deux variables aléatoires indépendantes de lois respectives $\mathcal{B}(n,p)$ et $\mathcal{B}(n,p)$.

1. Déterminer G_X et G_X les fonctions génératrices de$X$ et Y.
2. En déduire G_{X+Y}
3. Quelle est la loi de $X+Y$?

Exercice 4 ☆☆

Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de même paramètre $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$
1) Déterminer les fonctions génératrices de X et $3Y$.
2) En déduire la fonction génératrice de $Z = X + 3Y$.
3) En déduire $\mathbb{E}(Z)$ et $\mathbb{V}(Z)$.
4) X et Z sont-elles indépendantes ?
5) Trouver le minimum de la fonction $t \mapsto \mathbb{V}(X+tY)$.

Exercice 5 ☆☆

Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$.
a) Calculer $\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-r+1)]$ b) Retrouver ce résultat par les séries génératrices.

III. Exercices avancés

Exercice 6 ☆☆ *CCINP*

X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes, de même loi. $Z = X + Y + 1$. On suppose que $Z \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ où $p \in]0, 1[$.

a) Montrer que X admet une espérance et une variance et les calculer.

b) Trouver $G_X : t \mapsto \mathbb{E}\left(t^X\right)$.

c) En déduire la loi de X.

Exercice 7 ☆☆ *Mines-Télécom*

On considère $S(t) = \sum\limits_{n\geq 0} \dfrac{n^2+n+1}{n!} t^n$

1. Donner le rayon de convergence R de cette série.

2. Calculer $S(t)$ sur $] - R, R[$.

On se donne une variable aléatoire X telle que, $\forall t \in [-1, 1], G_X(t) = \lambda S(t)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

3. Que vaut λ ?

4. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 8 ☆☆☆ *Centrale*

On considère des lancers successifs d'une pièce ayant une probabilité p d'obtenir face et $q = 1 - p$ d'obtenir pile.

On se place dans un espace probabilisé (Ω, A, P) pour lequel F_n est un événement, où F_n : "on obtient face au n-ième lancer".

On note par ailleurs P_n : "on obtient pile au n-ième lancer" et E_n : "on obtient une suite de r faces consécutifs pour la première fois au n-ième lancer".

1. Exprimer E_0, ... , E_{r-1} puis E_r en fonction des F_k.

2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ on a : $E_{n+r+1} = \left(\bigcap\limits_{j=n+2}^{n+r+1} F_j\right) \cap P_{n+1} \cap \left(\bigcap\limits_{j=1}^{n} \overline{E_j}\right)$ en convenant $\bigcap\limits_{j=1}^{0} \overline{E_j} = \Omega$.

3. Montrer que E_n est un événement. On note alors $p_n = P(E_n)$

4. Écrire une fonction en python simulant l'expérience et renvoyant le temps d'attente de la première suite de r faces consécutifs.

5. a) Montrer que $\sum p_n$ converge. b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $p_{n+r+1} = p^r q \left(1 - \sum\limits_{k=1}^{n} p_k\right)$

6. Exprimer p_{n+r+1} en fonction de p_{n+r}, p, q, p_n

7. Montrer que $G(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} p_n x^n$ est définie et continue sur $[-1; 1]$

8. Démontrer alors qu'on a $\forall x \in [-1; 1]$, $\dfrac{G(x)}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(\sum\limits_{k=0}^{n} p_k\right) x^n$

9. Exprimer enfin $G(x)$ à l'aide de la question 5.b).

Notes

[5] correction :

$$E[X(X-1)\dots(X-r+1)] = \sum_{k=r}^{+\infty} \frac{k!}{(k-r)!} p(1-p)^{k-1}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=r}^{+\infty} \frac{k!}{(k-r)!} x^{k-r} = \frac{d^r}{dx^r}((1-x)^{-r}) = \frac{r!}{(1-x)^{r+1}}$

Donc $E[X(X-1)\dots(X-r+1)] = \dfrac{(1-p)^{r-1}\ r!}{p^r}$

$$G_X(t) = \frac{pt}{1-(1-p)t}$$

$$G_X^{(r)}(t) = E[X(X-1)\dots(X-r+1)t^X]$$

$$G_X^{(r)}(1) = E[X(X-1)\dots(X-r+1)]$$