Table des matières

Pré-requis

Programme de PCSI : probabilités discrètes sur un ensemble fini. Dénombrement. Notion de variable aléatoire à valeurs dans un ensemble fini.

Objectifs

Donner les outils pour considérer des suites d'évènements dénombrables et préparer un cadre pour les variables aléatoires discrètes

I. Dénombrabilité, sommabilité

I.1 Définitions

Définition 1.

Un ensemble est dit (resp. au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (resp. une partie de) $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{N}$ (resp. $I \subset \mathbb{N}$) avec des x_i distincts.

lemme 1. $\mathbb{N}^2$ *est dénombrable.*

On énumère en contre-diagonales □

lemme 2. $\mathbb{Z}$ *est dénombrable.*

$n \mapsto \begin{cases} \dfrac{n}{2} & \text{si } n \text{ pair} \\ -\dfrac{(n-1)}{2} & \text{si } n \text{ impair} \end{cases}$ est une bijection de $\mathbb{N}$ vers $\mathbb{Z}$. □

Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

Proposition 3 (Admis)**.**

on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ sa somme $\sum_{i\in I} x_i \in [0, +\infty]$.

Pour tout découpage en paquets $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ de I, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty} \Big(\sum_{i\in I_n} x_i \Big)$.

Définition 2.

La famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty[$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} x_i < \infty$.

exemple 1. $\sum_{n\in\mathbb{N}} \dfrac{1}{(1+n)^2} = \pi^2/6$,

$((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ non sommable !

Remarque 1. En pratique, dans le cas positif, on peut découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

Définition 3.

Une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est.

I.2 Calculs avec une famille sommable

Proposition 4 (Admis)**.**

Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.

Proposition 5 (Admis)**.**

En cas de sommabilité, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes :

- croissance :$x_i \leq y_i,\ \forall i \in I \Rightarrow \sum\limits_{i\in I} x_i \leq \sum\limits_{i\in I} y_i$
- linéarité : $\sum\limits_{i\in I} \lambda x_i + y_i = \lambda \sum\limits_{i\in I} x_i + \sum\limits_{i\in I} y_i$
- sommation par paquets : pour $I = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} I_n$, on a $\sum\limits_{i\in I} x_i = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \sum\limits_{i\in I_n} x_i$
- théorème de Fubini : $\sum\limits_{i,j\in I\times J} x_{i,j} = \sum\limits_{i\in I} \sum\limits_{j\in J} x_{i,j}$
- produit de deux sommes : $\sum\limits_{i\in I} x_i \times \sum\limits_{k\in K} y_k = \sum\limits_{(i,k)\in I\times K} x_i y_k$

II. Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

II.1 Univers, événements

Définition 4.

Si Ω est un ensemble au plus dénombrable, appelé **univers**, on appelle **tribu** sur Ω une partie $\mathcal{A}$ de l'ensemble $\mathcal{P}(\Omega)$ des parties de Ω telle que :

1. $\Omega \in \mathcal{A}$,
2. pour tout $A \in \mathcal{A}$, l'**évènement contraire** $\overline{A} = \Omega \setminus A$ appartient à $\mathcal{A}$,
3. pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'éléments de $\mathcal{A}$, la **réunion** $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ appartient à $\mathcal{A}$.

On dit alors que les éléments de la tribu $\mathcal{A}$ sont les **évènements**.
On dit alors que le couple $(\Omega, \mathcal{A})$ est un **espace probabilisable**

exemple 2. $\mathcal{A} = \{\emptyset, \{P\}, \{F\}, \{P, F\}\}$ est une tibu sur $\Omega = \{P, F\}$. Cela peut servir à modéliser un jet de pièce à pile ou face.

Définition 5 (Evènement)**.**

On appelle **évènements** tous les éléments d'une tribu $\mathcal{A}$ sur Ω.

Définition 6 (Evènement contraire)**.**

Pour tout évènement $A \in \mathcal{A}$, $\overline{A} = \Omega \setminus A$ est appelé **évènement contraire** de A (complémentaire dans Ω).

Définition 7 (union $\cup$, OU ensembliste)**.**

Pour $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, on note l'évènement $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ défini par

$\forall \omega \in \Omega,\ \omega \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff (\exists n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n)$

Ainsi la réunion $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ correspond à la réalisation d'au moins un évènement A_n, pour au moins une valeur $n \in \mathbb{N}$.

Définition 8 (intersection $\cap$, ET ensembliste)**.**

Pour $(A_n) \in \mathcal{A}^{\mathbb{N}}$, on note l'évènement $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ défini par

$\forall \omega \in \Omega,\ \omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \iff (\forall n \in \mathbb{N}, \omega \in A_n)$

Ainsi l'intersection $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$ correspond à la réalisation de tous les évènements A_n, pour $n \in \mathbb{N}$.

Remarque 2. L'univers Ω n'est en général pas précisé. Les éléments de $\mathcal{A}$ sont les événements.

exemple 3. Ecrire l'évènement réussir lors d'une tentative paire à l'aide des $(F_i)_{i\geq 1}$ dans une succession de pile ou face : $\bigcup_{p=1}^{+\infty} F_{2p}$

Proposition 6.

La tribu est par définition stable par réunion finie ou dénombrable et par passage au complémentaire. Elle est donc également stable par intersection finie ou dénombrable.

Remarque 3. $\omega \in \bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n \iff \forall n \in \mathbb{N},\ \omega \in A_n$ et

$\omega \in \bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \iff \exists n \in \mathbb{N},\ \omega \in A_n$

II.2 Loi de Probabilité

Définition 9 (Evènements incompatibles)**.**

Deux évènements A et B de $\mathcal{A}$ sont dits **incompatibles** (ou disjoints) si $A \cap B = \emptyset$.

Définition 10 (loi de probabilité)**.**

Si Ω est un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu sur Ω, on appelle **probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{A})$ une application $\mathbf{P} : \mathcal{A} \longrightarrow [0,1]$ telle que :

1. $\mathbf{P}(\Omega) = 1$,
2. [σ-additivité] pour toute suite $(A_n)_{n\geqslant 0}$ d'événements deux à deux **incompatibles**,

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

Définition 11.

On appelle **espace probabilisé** un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$ où $\mathcal{A}$ est une tribu et $\mathbf{P}$ une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Définition 12.

Pour tout évènement $A \in \mathcal{A}$, on appelle probabilité de A le nombre $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}\left(\{\omega \in \Omega;\ \omega \in A\}\right)$

II.3 Calculs de probabilités d'évènements

Proposition 7 (passage au complémentaire)**.**

Pour tout A de $\mathcal{A}$, $\mathbf{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbf{P}(A)$.

Proposition 8 (réunion)**.**

Pour tous A, B de $\mathcal{A}$, $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B) - \mathbf{P}(A \cap B)$.

Proposition 9 (Evènements incompatibles)**.**

Si deux évènements A et B de $\mathcal{A}$ sont **incompatibles** alors $\mathbf{P}(A \cap B) = 0$ et $\mathbf{P}(A \cup B) = \mathbf{P}(A) + \mathbf{P}(B)$.

Cela est même valable pour les réuninons dénombrables, c.f. σ-additivité.

Proposition 10 (croissance)**.**

Si deux évènements A et B de $\mathcal{A}$ et si $A \subset B$, alors $\mathbf{P}(A) \leq \mathbf{P}(B)$.

Proposition 11.

$$\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}.$$

Proposition 12 (Continuité croissante :)**.**

si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_n \subset A_{n+1}$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

démonstration :

Pour $N \in \mathbb{N}$, on a $A_N = \bigcup_{n=0}^{N} A_n$. La suite $(\mathbf{P}(A_N))_N$ est donc croissante, et majorée par 1 donc converge.

Proposition 13 (Continuité décroissante :)**.**

si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une suite d'événements telle que, pour tout n, on ait $A_{n+1} \subset A_n$, alors :

$$\lim_{n\to+\infty} \mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right).$$

démonstration : On passe au complémentaire $1-\mathbf{P}(A_n) = \mathbf{P}(A_n^C)$ converge vers $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n^C\right) = 1-\mathbf{P}\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$

Remarque 4. Application, pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone) :

$\left(\bigcup_{n=0}^{N} A_n\right)_{N\geq 0}$ est croissante, donc la limite suivante existe $\mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$

De même $\left(\bigcap_{n=0}^{N} A_n\right)_{N\geq 0}$ est décroissante, donc $\mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right) \xrightarrow[k\to+\infty]{} \mathbf{P}\left(\bigcap_{k=0}^{+\infty} A_k\right)$.

Proposition 14 (Sous additivité :)**.**

si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'événements, alors :

$$\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n).$$

démonstration : C'est vrai pour les sommes finies, donc à la limite lorsqu'elles existent dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$.

Remarque 5. En cas de divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$, on rappelle que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty.$$

II.4 Conditionnement et indépendance

4.a) Probabilités conditionnelles

Définition 13.

Si A et B sont deux événements tels que $\mathbf{P}(B) > 0$, on appelle **probabilité conditionnelle** de A **sachant** B le réel

$$\boxed{\mathbf{P}_B(A) = \frac{\mathbf{P}(A \cap B)}{\mathbf{P}(B)}}$$

Notation $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A \mid B)$.

Proposition 15.

L'application $\mathbf{P}_B$ est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

démonstration : on a $\mathbf{P}_B(\Omega) = \dfrac{\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} = 1$
La propriété sur les réunions dénombrables résulte directement de celle de $\mathbf{P}$. □

Proposition 16 (Formule des probabilités composées)**.**

Soient $A_1, \dots, A_n$ des évènements tels que $\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) \neq 0$. Alors
$\mathbf{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbf{P}(A_1) \times \mathbf{P}_{A_1}(A_2) \times \mathbf{P}_{A_1 \cap A_2}(A_3) \times \dots \times \mathbf{P}_{A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}}(A_n)$

démonstration : par récurrence sur $n \geq 2$

exemple 4. Une urne contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On tire une à une et sans remise 3 boules. Quelle est la probabilité que les deux premières soient blanches et que la troisième soit noire ?

$$\mathbf{P}(B_1 \cap B_2 \cap \overline{B_3}) = \mathbf{P}(B_1)\,\mathbf{P}_{B_1}(B_2)\,\mathbf{P}_{B_2}(\overline{B_3}) = \frac{4}{7} \times \frac{3}{6} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{35}$$

Remarque 6. On adopte la convention $\mathbf{P}(B \mid A_n)\mathbf{P}(A_n) = 0$ lorsque $\mathbf{P}(A_n) = 0$.

4.b) Indépendance d'évènements

Définition 14 (Indépendance de deux événements)**.**

Deux évènements A et B sont dits **indépendants** si $\boxed{\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A) \times \mathbf{P}(B)}$.

Remarque 7. Pour de tels évènements, $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}_B(A)$: la réalisation éventuelle de B n'influe pas sur celle de A.

Proposition 17.

Si $\mathbf{P}(B) > 0$, l'indépendance de A et B équivaut à $\mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$.

démonstration $\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B) \Longleftrightarrow \mathbf{P}_B(A) = \dfrac{\mathbf{P}(A)\mathbf{P}(B)}{\mathbf{P}(B)} \Longleftrightarrow \mathbf{P}_B(A) = \mathbf{P}(A)$ □

exemple 5. Jeux de dés

Définition 15 (Indépendance d'une famille finie d'événements)**.**

Des évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits **mutuellement indépendants** si pour toute partie J non vide de $[\![1, n]\!]$, on a :

$$\mathbf{P}\left(\bigcap_{j \in J} A_j\right) = \prod_{j \in J} \mathbf{P}(A_j)$$

Remarque 8. L'indépendance des événements A_i deux à deux n'entraîne pas leur indépendance si $n \geqslant 3$!

Définition 16 (Indépendance 2 à 2 d'une famille finie d'événements)**.**

Des évènements $A_1, \ldots, A_n$ sont dits **deux à deux indépendants** si
pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\mathbf{P}(A_i \cap A_j) = \mathbf{P}(A_i) \times \mathbf{P}(A_j)$

exemple 6. évènement A : pile au premier lancer
évènement B : pile au deuxième lancer
évènement C : les deux lancers donnent le même résultat
$\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(C) = 0,5$
$\mathbf{P}(A \cap B) = \mathbf{P}(B \cap C) = \mathbf{P}(C \cap A) = 0,25$ les événements sont deux à deux indépendants.
$\mathbf{P}(A \cap B \cap C) = 0,25 \neq 0,5^3$. ils ne sont pas mutuellement indépendants

exemple 7. Une urne contient quatre jetons : un vert, un blanc, un rouge et un tricolore vert-blanc-rouge. On en tire un au hasard. On considère les trois évènements :

$V = \{\text{le jeton tiré contient du vert}\}$ $B = \{\text{le jeton tiré contient du blanc}\}$ $R = \{\text{le jeton tiré contient du rouge}\}$

On a $\mathbf{P}(V) = \mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(R) = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$.

$\mathbf{P}(V \cap B) = \mathbf{P}(tricolore) = \dfrac{1}{4} = \mathbf{P}(V)\mathbf{P}(B)$, donc V et B sont deux à deux indépendants, et idem pour B et R, ainsi que V et R.

Par ailleurs, $\mathbf{P}((V \cap B) \cap R)) = \dfrac{1}{4} \neq \mathbf{P}(V \cap B)\mathbf{P}(R) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{8}$

Comme, $\mathbf{P}_{V \cap B}(R) = 1 \neq \mathbf{P}(R)$, car $V \cap B = \{tricolore\}$, la connaissance de la realisation simultanée de V et C modifie notre information sur R.

La notion d'indépendance deux à deux n'est donc pas suffisante pour traduire l'idée intuitive d'indépendance de plusieurs événements. Ceci motive la définition suivante.

Proposition 18.

Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.

Proposition 19.

Si B est indépendant des (A_n), alors il l'est des $(\overline{A_n})$.

II.5 Systèmes complets d'évènements, probabilités totales

Définition 17 (Evénement presque sûr)**.**

On appelle évènement presque-sûr un évènement $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbf{P}(A) = 1$

exemple $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ la réalisation d'un face dans la répétition infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

Définition 18 (Evénement négligeable)**.**

On appelle évènement négligeable un évènement $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mathbf{P}(A) = 0$

exemple $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} F_n$ la réalisation systématique de tirages face dans la répétition infinie d'épreuves de Bernoulli indépendantes.

Définition 19 (Système complet dénombrable d'événements)**.**

Une famille dénombrable $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements est dite **système complet dénombrable d'événements si :** $\Omega = \bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} \mathcal{A}_n$ **et,** $\forall i \neq j,\ \mathcal{A}_i \cap \mathcal{A}_j = \emptyset$

Remarque 9. On peut partitionner Ω en une réunion dénombrable d'évènements disjoints deux à deux.

Proposition 20 (Formule des probabilités totales)**.**

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements, alors la série $\sum\limits_n \mathbf{P}(B \cap A_n)$ converge et

$$\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B \cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\ \mathbf{P}(A_n)$$

démonstration :

On a $B = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (B \cap A_n)$ est une réunion d'évènements deux à deux incompatibles.

Donc par définition de $\mathbf{P}$, on a $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} (B \cap A_n)\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(B \cap A_n)$.

Or pour $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbf{P}(A_n \cap B) = \mathbf{P}_{A_n}(B)\mathbf{P}(A_n)$, d'où le résultat. □

exemple 8. On dispose de 3 urnes U_1, U_2, U_3, chacune contient 10 boules ; parmi elles, U_1 contient 1 blanche, U_2 contient 2 blanches, et U_3 contient 6 blanches. On tire au hasard une boule dans l'une des trois urnes. Quelle est la probabilité d'obtenir une blanche ?

On note B l'événement "on obtient une boule blanche" et A_i l'événement "on tire la boule dans l'urne U_i". $\{A_1, A_2, A_3\}$ forme un système complet d'événements, et : $\mathbf{P}(B) = \mathbf{P}(A_1)\mathbf{P}_{A_1}(B) + \mathbf{P}(A_2)\mathbf{P}_{A_2}(B) + \mathbf{P}(A_3)\mathbf{P}_{A_3}(B) = \frac{1}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{5}{10} \times \frac{1}{3} + \frac{6}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{10}$

Remarque 10. Convention $\mathbf{P}(B|A_n)\mathbf{P}(A_n) = 0$ lorsque $\mathbf{P}(A_n) = 0$.

Définition 20 (Système quasi-complet dénombrable d'événements)**.**

Une famille dénombrable $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'évènements est dite **système quasi-complet dénombrable d'événements si les** $A_n,\ n \in \mathbb{N}$ **sont deux à deux incompatibles et si** $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1$**.**

Remarque 11. la formule des probabilités totales reste vraie pour un système quasi-complet dévènements c'est à dire pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles tels que $\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}(A_n) = 1$.

Proposition 21 (Formule de Bayes)**.**

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'événements (ou quasi-complet), et B un évènement tel que $\mathbf{P}(B) > 0$.
Alors

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ \mathbf{P}_B(A_k) = \frac{\mathbf{P}_{A_k}(B)\ \mathbf{P}(A_k)}{\mathbf{P}(B)} = \frac{\mathbf{P}_{A_k}(B)\ \mathbf{P}(A_k)}{\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\ \mathbf{P}(A_n)}$$

démonstration : Par définition, $\mathbf{P}_B(A_k) = \frac{\mathbf{P}(A_k \cap B)}{\mathbf{P}(B)}$

or $\mathbf{P}(A_k \cap B) = \mathbf{P}_{A_k}(B)\mathbf{P}(A_k)$

Par la formule des probabilités totales, $\mathbf{P}(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbf{P}_{A_n}(B)\ \mathbf{P}(A_n)$

D'où le résultat en faisant le quotient. □

exemple 9. Test viral. Un laboratoire propose un test de dépistage du virus Ebola.

Des études randomisées ont permis d'établir les statistiques suivantes :
• si le patient est sain, le test est négatif dans 99.8
• si le patient est malade, le test est positif dans 99.9

On sait d'autre part qu'il y a un animal malade sur 10000. Peut-on avoir confiance en ce test ? Pour cela, on déterminera :
a) la probabilité que le patient soit malade, sachant que le test est positif ;
b) la probabilité que le patient soit sain, sachant que le test est négatif.

a) $(M, \overline{M})$ est un système complet d'évènements. Bayes

$$\mathbf{P}_P(M) = \frac{\mathbf{P}_M(P)\,\mathbf{P}(M)}{\mathbf{P}_M(P)\,\mathbf{P}(M) + \mathbf{P}_{\overline{M}}(P)\,\mathbf{P}(\overline{M})} = \frac{\frac{999}{1000}\frac{1}{10000}}{\frac{999}{1000}\frac{1}{10000} + \frac{1}{500}\frac{9999}{10000}} = \frac{111}{2333} \approx 4,76\%$$

b) $(M, \overline{M})$ est un système complet d'évènements. Bayes

$$\mathbf{P}_{\overline{P}}(\overline{M}) = \frac{\mathbf{P}_{\overline{M}}(\overline{P})\,\mathbf{P}(\overline{M})}{\mathbf{P}_{\overline{M}}(\overline{P})\,\mathbf{P}(\overline{M}) + \mathbf{P}_M(\overline{P})\,\mathbf{P}(M)} = \frac{\frac{499}{500}\frac{9999}{10000}}{\frac{499}{500}\frac{9999}{10000} + \frac{1}{1000}\frac{1}{10000}} = \frac{9979002}{997903} \approx 99.99\%$$

Si le test est positif, la probabilité que le patient soit vraiment malade est très faible. Avec ce test, les patients déclarés malades sont en majorité sains, on ne peut donc pas avoir confiance en ce test pour déterminer si un patient est malade.

Par contre, si un patient est déclaré sain, on peut être sûr qu'il l'est avec une probabilité de 99,99%. On peut donc avoir confiance en ce test pour déterminer si un patient est sain.

NOUVEAU Programme PC 2022 :

Variables aléatoires discrètes

On généralise l'étude des variables aléatoires à valeurs dans un ensemble fini menée en première année aux variables aléatoires discrètes. Ces outils permettent d'aborder, sur des exemples simples, l'étude de procédés stochastiques à temps discret. La mise en place du cadre de cette étude se veut à la fois minimale, pratique et rigoureuse :

- *la notion de tribu n'appelle aucun autre développement que sa définition ;*
- *l'étude de la dénombrabilité d'un ensemble et la construction d'espaces probabilisés sont hors programme ;*
- *les diverses notions de convergences (presque sûre, en probabilité, en loi, etc.) sont hors programme.*

Toutes les variables aléatoires mentionnées dans le programme sont implicitement supposées discrètes.

La notion de variable à densité est hors programme.

La notion d'espérance conditionnelle est hors programme.

A - Ensembles dénombrables, familles sommables

Ce préambule propose une introduction a minima de la dénombrabilité et des familles sommables, afin de poser les bases de vocabulaire, méthodes et résultats qui seront admis, et directement utilisés. Chaque professeur est libre d'en adapter le contenu au niveau de formalisme qu'il juge préférable pour ses étudiants.

Ces notions ne feront l'objet d'aucune évaluation spécifique, et leur usage est strictement réservé au contexte probabiliste.

- Un ensemble est dit (au plus) dénombrable s'il est en bijection avec (une partie de) $\mathbb{N}$, c'est-à-dire s'il peut être décrit en extension sous la forme $\{x_i, i \in I\}$ où $I = \mathbb{N}$ ($I \subset \mathbb{N}$) avec des x_i distincts.

  Sont dénombrables : $\mathbb{Z}$, un produit cartésien d'un nombre fini d'ensembles dénombrables, une union au plus dénombrable d'ensembles dénombrables. Une partie d'un ensemble dénombrable est au plus dénombrable.

- En vue de généraliser les sommes finies et les sommes de séries de réels positifs, on admet sans soulever de difficulté qu'on sait associer à toute famille au plus dénombrable $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ sa somme $\sum_{i\in I} x_i \in [0, +\infty]$, et que pour tout découpage en paquets $I = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} I_n$ de I, $\sum_{i\in I} x_i = \sum_{n=0}^{+\infty}\Big(\sum_{i\in I_n} x_i\Big)$.

  La famille $(x_i)_{i\in I}$ d'éléments de $[0, +\infty]$ est dite sommable si $\sum_{i\in I} x_i < \infty$. En pratique, dans le cas positif, les étudiants peuvent découper, calculer et majorer leurs sommes directement, la finitude de la somme valant preuve de sommabilité.

- Une famille $(x_i)_{i\in I}$ au plus dénombrable de nombres complexes est dite sommable si $(|x_i|)_{i\in I}$ l'est. Pour $I = \mathbb{N}$, la sommabilité d'une suite équivaut à la convergence absolue de la série associée. Si $|x_i| \leqslant y_i$ pour tout $i \in I$, la sommabilité de $(y_i)_{i\in I}$ implique celle de $(x_i)_{i\in I}$.

  En cas de sommabilité, les sommes se manipulent naturellement grâce aux propriétés suivantes : croissance, linéarité, sommation par paquets, théorème de Fubini, produit de deux sommes.

B - Probabilités, variables aléatoires discrètes et lois usuelles

Contenus	Capacités & commentaires

Contenus	Capacités & Commentaires

a) Univers, événements, variables aléatoires discrètes

Univers Ω, tribu $\mathcal{A}$. Espace probabilisable $(\Omega, \mathcal{A})$.	On se limite à la définition et à la stabilité par les opérations ensemblistes finies ou dénombrables. Traduction de la réalisation des événements $\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ et $\bigcap\limits_{n=0}^{+\infty} A_n$ à l'aide des quantificateurs $\exists$ et $\forall$.
Événements.	Généralisation du vocabulaire relatif aux événements introduit en première année.
Une variable aléatoire discrète X est une application définie sur Ω, telle que $X(\Omega)$ est au plus dénombrable et, pour tout $x \in X(\Omega)$, $X^{-1}(\{x\})$ est un événement.	L'univers Ω n'est en général pas explicité. Notations $(X = x)$, $\{X = x\}$, $(X \in A)$. Notation $(X \geqslant x)$ (et analogues) lorsque X est à valeurs réelles.

b) Probabilité

Probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$, σ-additivité. Espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance de la probabilité.	Notation $P(A)$.
Continuité croissante, continuité décroissante.	Application : pour une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements (non nécessairement monotone), limites quand n tend vers l'infini de $$P\Big(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\Big) \quad \text{et} \quad P\Big(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\Big).$$
Sous-additivité : $P\Big(\bigcup\limits_{n=0}^{+\infty} A_n\Big) \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.	En cas de divergence de la série à termes positifs $\sum P(A_n)$, on rappelle que $$\sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n) = +\infty.$$
Événement presque sûr, événement négligeable.	Système quasi-complet d'événements.

c) Probabilités conditionnelles

Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A\|B) = P_B(A) = \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
L'application P_B définit une probabilité.	
Formule des probabilités composées.	
Formule des probabilités totales.	Si $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est un système complet ou quasi-complet d'événements, alors $$P(B)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(B\cap A_n)=\sum_{n=0}^{+\infty}P(B\|A_n)P(A_n)$$ On rappelle la convention $P(B\|A_n)P(A_n)=0$ lorsque $P(A_n)=0$.
Formule de Bayes.	