Colle de **mathématiques**

Cette semaine, la colle doit se mettre sur la forme :

1. **Question de cours** sur le chapitre réduction décrit ci-dessous :

2. **Exercice 1** : ramener votre copie du DS 3 et le colleur vous refera faire une ou plusieurs questions des exercices 1 ET 2. Je vous demande donc de bien travailler la correction.

3. **Exercice 2** : Nature d'une intégrale impropre : on doit se ramener à une intégrale de référence comportant une fonction de Riemann, Bertrand, ln ou exp. Toute intégrale avec exp en $+\infty$ doit se traiter avec le critère du o(). Je répète que les résultats sur une intégrale de Bertrand sont à redémontrer.

4. **Exercice 3** : Exercice sur la réduction (évidemment les chapitres sur éléments propres et polynômes d'endo. et matriciels sont supposés acquis).

1 Réduction

1. Définition d'une somme d'une famille finie de sous espaces vectoriels, structure d'espace vectoriel.
2. Somme directe : définition et comment montrer qu'une somme est directe, ou qu'elle ne l'est pas, **La somme de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe**.
3. Sous espaces supplémentaires.
4. Cas où E est de dimension finie : Caractérisation des sommes directes et de sous espaces supplémentaires par la dimension .
5. Base d'un espace adaptée à une décomposition en somme directe ou à un sous espace vectoriel.
6. Diagonalisation :
   (a) **Définition, énoncé du théorème** :
   Il y a équivalence entre les points suivants :
      i. u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$
      ii. $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus E_{\lambda_2}(u) \oplus \cdots \oplus E_{\lambda_p}(u)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u.
      iii. $n = \dim E_{\lambda_1}(u) + \dim E_{\lambda_2}(u) + \cdots + \dim E_{\lambda_p}(u)$.
      iv. χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et $\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(u), \omega_u(\lambda) = \dim E_\lambda(u)$
   (b) **Si $Sp(u)$ est réduit au singleton $\{\lambda\}$, u est diagonalisable ssi $u = \lambda Id_E$**
   (c) i. **Si χ_u est scindé sur $\mathbb{K}$ et si toutes ses racines sont simples, alors u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$.Mais la réciproque est fausse!!!!!!!**.
      ii. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.
   (d) Caractérisation de la diagonalisation par les polynômes annulateurs : connaître les énoncés suivants :
      i. Soit E un $\mathbb{K}$-e.v de dimension finie et u un endomorphisme de E.
      u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si il annule un polynôme scindé sur $\mathbb{K}$ à racines simples.
      ii. u est diagonalisable sur $\mathbb{K}$ si et seulement si $P = \prod_{i=1}^{p} (X - \lambda_i)$ où $(\lambda_1, \cdots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u est un polynôme annulateur de u.
      iii. Caractérisation des sous espaces stables par un endomorphisme diagonalisable.
   (e) Trigonalisation : définition, caractérisation par le polynôme caractéristique scindé, exemples, aucune méthode de trigonalisation n'est exigible.