

Colle de mathématiques

Cette semaine, la colle doit se mettre sur la forme :

1. **Question de cours** sur le chapitre réduction décrit ci-dessous :
2. Deux exercices sur le chapitre réduction

1 Réduction

1. Définition d'une somme d'une famille finie de sous espaces vectoriels, structure d'espace vectoriel.
2. Somme directe : définition et comment montrer qu'une somme est directe, ou qu'elle ne l'est pas, **La somme de sous espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.**
3. Sous espaces supplémentaires.
4. Cas où E est de dimension finie : Caractérisation des sommes directes et de sous espaces supplémentaires par la dimension .
5. Base d'un espace adaptée à une décomposition en somme directe ou à un sous espace vectoriel.
6. Diagonalisation :
 - (a) **Définition, énoncé du théorème :**
Il y a équivalence entre les points suivants :
 - i. u est diagonalisable sur \mathbb{K}
 - ii. $E = E_{\lambda_1}(u) \oplus E_{\lambda_2}(u) \oplus \dots \oplus E_{\lambda_p}(u)$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u .
 - iii. $n = \dim E_{\lambda_1}(u) + \dim E_{\lambda_2}(u) + \dots + \dim E_{\lambda_p}(u)$.
 - iv. χ_u est scindé sur \mathbb{K} et $\forall \lambda \in \text{Sp}(u), \omega_u(\lambda) = \dim E_\lambda(u)$
 - (b) **Si $\text{Sp}(u)$ est réduit au singleton $\{\lambda\}$, u est diagonalisable ssi $u = \lambda Id_E$**
 - (c)
 - i. **Si χ_u est scindé sur \mathbb{K} et si toutes ses racines sont simples, alors u est diagonalisable sur \mathbb{K} et savoir donner un exemple de matrice diagonalisable dont le polynôme caractéristique n'est pas à racines simples.**
 - ii. Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n admettant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.
 - (d) Caractérisation de la diagonalisation par les polynômes annulateurs : connaître les énoncés suivants :
 - i. Soit E un \mathbb{K} -e.v de dimension finie et u un endomorphisme de E .
 u est diagonalisable sur \mathbb{K} si et seulement si il annule un polynôme scindé sur \mathbb{K} à racines simples.
 - ii. u est diagonalisable sur \mathbb{K} si et seulement si $P = \prod_{i=1}^p (X - \lambda_i)$ où $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ sont les valeurs propres deux à deux distinctes de u est un polynôme annulateur de u .
 - iii. Caractérisation des sous espaces stables par un endomorphisme diagonalisable.
 - (e) Trigonalisation : définition, caractérisation par le polynôme caractéristique scindé, exemples, aucune méthode de trigonalisation n'est exigible.
 - (f) Applications de la réduction : calcul de puissances, d'inverse, **suites récurrentes linéaires d'ordre 2 à termes soit complexes, soit réels**, suites récurrentes linéaires d'ordre p (connaître la méthode pour trouver le terme général d'une suite $(u_n)_n$ telle que $\exists (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) \in \mathbb{K}^p, \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+p} = \alpha_1 u_{n+p-1} + \dots + \alpha_p u_n$.