Colle de **mathématiques**

Cette semaine, la colle doit se mettre sous la forme une question de cours et deux exercices sur les séries entières.

1 Séries entières

Les attendus de ce chapitre sont

1. Savoir reconnaître une série entière, attention aux séries lacunaires !
2. Connaître la nature des séries entières à l'intérieur puis l'extérieur du disque ouvert de convergence (ou intervalle ouvert de convergence).
3. Calcul du rayon de convergence :
   (a) Soit appliquer la règle de D'Alembert : attention, interdit d'écrire $R = \frac{1}{l}$, il faut rédiger en deux temps :
   - d'abord je cherche la limite de $\left|\dfrac{a_{n+1}\, z^{n+1}}{a_n\, z^n}\right|$, je trouve
   - soit 0 alors la série entière est toujours absolument cv et $R = +\infty$,
   - soit $+\infty$ alors la série entière est toujours grossièrement dv et $R = 0$,
   - soit $l|z|$, alors cv abs pour $|z| < \frac{1}{l}$, je fais un dessin et je trouve $R \geq \frac{1}{l}$ puis dv grossière pour $|z| > \frac{1}{l}$, je fais un dessin et je trouve $R \leq \frac{1}{l}$ d'où $R = \frac{1}{l}$.
   - Attention aux séries lacunaires !!!

   (b) soit des comparaisons entre les rayons de convergence des séries $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ quand $|a_n| \leq |b_n|$, $a_n = O(b_n)$, $a_n \sim b_n$.
4. Rayon de convergence d'une somme, d'un produit externe, interne de deux séries entières : bien connaître et savoir reconnaître un produit de Cauchy.
5. Propriétés de la somme d'une série entière :
   - Convergence normale sur tout segment inclus dans l'intervalle ouvert de convergence, continuité de la somme.
   - Intégration d'une série entière, primitives de la somme.
   - La somme d'une série entière est $\mathcal{C}^\infty$ sur son intervalle ouvert de convergence, identification de deux séries entières.
   - Utilisation des séries entières pour montrer qu'une fonction est C^∞.
6. Fonctions développables en série entière au voisinage de 0 : définition, série de Taylor. **Exemple de fonction C^∞ sur $\mathbb{R}$ qui n'admet pas de DSE**.
7. **Développements en série entière classiques** : exponentielle, cos, sin, sh, ch, $(1 + x)^\alpha$ (**avec méthode utilisant une équation différentielle**), fonction rationnelle, penser à utiliser la dérivation pour obtenir les DSE de $ln(1 \pm x)$, $arcsin$, $arccos$, $arctan$.