Colle de **mathématiques**

Cette semaine, la colle doit se mettre sous la forme

1. une question de cours sur les variables aléatoires
2. un exercice sur les séries entières utilisant un développement en série entière .
3. un exercice sur les variables aléatoires.

1 Séries entières

Les attendus de ce chapitre sont

1. Fonctions développables en série entière au voisinage de 0 : définition, série de Taylor.
2. Développements en série entière classiques : exponentielle, cos, sin, sh, ch, $(1+x)^{\alpha}$ (avec méthode utilisant une équation différentielle), fonction rationnelle, penser à utiliser la dérivation pour obtenir les DSE de $ln(1 \pm x), arcsin, arccos, arctan$.

2 Variables aléatoires discrètes

1. Variables aléatoires, la notation $(X \in U), (X = a)$, opérations .
2. Loi de probabilité d'une v.a.d
   (a) Pour trouver la loi de X, je procède de la manière suivante :
      i. Je donne $X(\Omega)$, c'est à dire toutes les issues possibles. On note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$.
      ii. On se donne une issue x_i et je dois calculer $P(X = x_i)$. Pour cela, j'écris $(X = x_i)$ à l'aide d'une réunion, ou/et intersection ou/et contraire d'événements dont il est plus facile d'étudier la proba. et nous amène à utiliser les formules vues au chapitre Espaces probabilisés.

   (b) Comment savoir si X est une v.a lorsqu'on nous donne une suite $(p_n)_n$ telle que $P(X = x_n) = p_n$: je dois montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geq 0, \sum_{n \geq 0} p_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

   (c) **Les lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson**.*connaître leur modèle*.

   (d) Couple de variables aléatoires discrètes : loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles.

   (e) Variables aléatoires indépendantes, mutuellement indépendantes : définitions, la propriété : Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes.
      i. Alors, pour toute partie I finie de $\mathbb{N}$, pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de $(X_i(\Omega))_{i \in I}$,
      $$P(\bigcap_{i \in I} (X_i \in A_i)) = \prod_{i \in I} P((X_i \in A_i))$$
      ii. Soient f et g deux fonctions à plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que l'on peut définir les variables aléatoires $f(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_p})$ et $g(X_{k_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{k_q})$ où $\{i_1, \cdots, i_p\} \cap \{k_1, \cdots, k_q\} = \emptyset$.
      $f(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_p})$ et $g(X_{k_1}, X_{k_2}, \cdots, X_{k_q})$ sont indépendantes.

   (f) Espérance : définition, pour une variable aléatoire discrète **à valeurs dans** $\mathbb{N}$, X admet une espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geq k)$ converge et dans ce cas, $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$, **espérances des variables aléatoires usuelles**,**énoncé du théorème de transfert**, linéarité de l'espérance, positivité, croissance, espérance d'un produit de deux variables indépendantes.

   (g) Variance : définition, **Formule de König-Huyghens,** $V(aX + b) = a^2 V(X)$**, variance des variables aléatoires usuelles**.

   (h) Covariance : définition, propriétés, inégalité de Cauchy-Schwarz, lien avec la variance d'une somme de deux variables aléatoires, cas de variables aléatoires indépendantes.