Colle de **mathématiques**

Cette semaine, la colle doit se mettre sous la forme

1. une question de cours .
2. un exercice sur les variables aléatoires.
3. un exercice sur les intégrales à paramètres.

1 Séries entières

Les attendus de ce chapitre sont

1. Fonctions développables en série entière au voisinage de 0 : définition, série de Taylor.
2. Développements en série entière classiques : exponentielle, cos, sin, sh, ch, $(1+x)^{\alpha}$ (avec méthode utilisant une équation différentielle), fonction rationnelle, penser à utiliser la dérivation pour obtenir les DSE de $ln(1 \pm x), arcsin, arccos, arctan$.

2 Variables aléatoires discrètes

1. Variables aléatoires, la notation $(X \in U), (X = a)$, opérations .
2. Loi de probabilité d'une v.a.d
   (a) Pour trouver la loi de X, je procède de la manière suivante :
      i. Je donne $X(\Omega)$, c'est à dire toutes les issues possibles. On note $X(\Omega) = \{x_i, i \in I\}$.
      ii. On se donne une issue x_i et je dois calculer $P(X = x_i)$. Pour cela, j'écris $(X = x_i)$ à l'aide d'une réunion, ou/et intersection ou/et contraire d'événements dont il est plus facile d'étudier la proba. et nous amène à utiliser les formules vues au chapitre Espaces probabilisés.

   (b) Comment savoir si X est une v.a lorsqu'on nous donne une suite $(p_n)_n$ telle que $P(X = x_n) = p_n$: je dois montrer que :
   $\forall n \in \mathbb{N}, p_n \geq 0, \sum_{n \geq 0} p_n$ converge et $\sum_{n=0}^{+\infty} p_n = 1$.

   (c) **Les lois usuelles : uniforme, Bernoulli, binomiale, géométrique et Poisson**.*connaître leur modèle*.

   (d) Couple de variables aléatoires discrètes : loi conjointe, lois marginales, lois conditionnelles.

   (e) Variables aléatoires indépendantes, mutuellement indépendantes : définitions, la propriété : Soit $(X_i)_{i \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes.
      i. Alors, pour toute partie I finie de $\mathbb{N}$, pour toute famille $(A_i)_{i \in I}$ de parties de $(X_i(\Omega))_{i \in I}$,
      $$P(\bigcap_{i \in I} (X_i \in A_i)) = \prod_{i \in I} P((X_i \in A_i))$$
      ii. Soient f et g deux fonctions à plusieurs variables à valeurs dans $\mathbb{R}$ telles que l'on peut définir les variables aléatoires $f(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_p})$ et $g(X_{k_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{k_q})$ où $\{i_1, \cdots, i_p\} \cap \{k_1, \cdots, k_q\} = \emptyset$.
      $f(X_{i_1}, X_{i_2}, \cdots, X_{i_p})$ et $g(X_{k_1}, X_{k_2}, \cdots, X_{k_q})$ sont indépendantes.

   (f) Espérance : définition, pour une variable aléatoire discrète **à valeurs dans** $\mathbb{N}$, X admet une espérance finie si et seulement si la série de terme général $P(X \geq k)$ converge et dans ce cas, $E(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X \geq k)$, **espérances des variables aléatoires usuelles**,**énoncé du théorème de transfert**, linéarité de l'espérance, positivité, croissance, espérance d'un produit de deux variables indépendantes.

   (g) Variance : définition, **Formule de König-Huyghens,** $V(aX + b) = a^2 V(X)$**, variance des variables aléatoires usuelles**.

   (h) Définition de la covariance de deux v.a.d admettant des moments d'ordre 2 et les propriétés : Inégalité de Cauchy-Schwarz. $Cov(X, X) = V(X), Cov(X, Y) = Cov(Y, X), Cov(X + Y, Z) = Cov(X, Z) + Cov(Y, Z), Cov(aX, bY) = abCov(X, Y)$ .Si X et Y sont indépendantes, alors $Cov(X, Y) = 0$ mais la réciproque est fausse. $V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)$. Si X et Y sont indépendantes, $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$ et généralisation pour une famille de v.a.d mutuellement indépendantes.

   (i) Fonction génératrice de X : définition, propriété : caractère C^{∞} sur $]-1, 1[$, lien avec les dérivées successives en 0 et la loi de probabilité de X, Comment retrouver l'espérance et la variance à partir de G_X, **fonction génératrice des lois usuelles, fonction génératrice d'une somme de deux v.a indépendantes,La somme de deux variables aléatoires suivant une loi de Poisson suit une loi de Poisson**

   (j) Inégalités de Markov, Bienaymé-Tchebychev, Loi faible des grands nombres :**Enoncés et démonstrations**

3 Intégrales à paramètre

Vous devez savoir énoncer et appliquer les théorèmes suivants :

1. *Théorème de continuité des intégrales à paramètre* :
   Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I \times J, \mathbb{K})$.
   On suppose :
   1. $\forall t \in J, x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.
   2. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
   3. *Hypothèse de domination* :
   — soit globale : $\exists \varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$
   — $\forall K = [a,b]$ segment inclus dans I, $\exists \varphi_K$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, |f(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$
   Alors,
   $$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_J f(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \text{ est continue sur } I.$$
2. *Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre*, appelé aussi *Théorème de Leibniz* :
   Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$.
   On suppose :
   1. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.
   2. $\forall t \in J, x \longmapsto f(x,t)$ est C^1 sur I.
   Sa dérivée est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et est à nouveau considérée comme fonction de deux variables :
   3. $\forall x \in I, t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
   4. *Hypothèse de domination* :
   — soit globale : $\exists \varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in I \times J, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi(t)$$
   — $\forall K = [a,b]$ segment inclus dans I, $\exists \varphi_K$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in K \times J, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$
   Alors,
   $$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_J f(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et}$$
   $$\forall x \in I, g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$
3. Soit un entier k supérieur ou égal à 1.
   On suppose :
   1. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.
   2. $\forall t \in J, x \longmapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur I.
   Ses dérivées successives sont notées $\dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}$ où $1 \leq i \leq k$ et est à nouveau considérée comme fonction de deux variables
   3. $\forall 1 \leq i \leq k-1,\ \forall x \in I, t \longmapsto \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .
   4. $\forall x \in I, t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur J .
   5. *Hypothèse de domination* :
   — soit globale : $\exists \varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in I \times J, |\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leq \varphi(t)$$
   — soit locale : $\forall K$ segment inclus dans I, $\exists \varphi_K$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in K \times J, |\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$
   Alors,

$$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_J f(x,t)dt \end{array}$$ est de classe C^k sur I et

$$\forall 1 \leq i \leq k,\ \forall x \in I, g^{(i)}(x) = \int_J \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$$

4. *Théorème de convergence dominée à paramètre continu*
   Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$, a un élément ou une borne finie ou non de I .
   On suppose :
   1. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
   2. $\forall t \in J, \lim\limits_{x \to a} f(x,t) = l(t)$.
   3. $\forall x \in I, t \mapsto l(t)$ est continue par morceaux sur J.
   4. *Hypothèse de domination* : $\exists \varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :

   $$\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

   l est intégrable sur J et

   $$\lim_{x \to a} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J l(t)\mathrm{d}t$$

   On retiendra trois méthodes pour trouver une limite d'une fonction définie par une intégrale à paramètre :
   — Encadrement et théorème des gendarmes.
   — Changement de variable pour faire sortir le paramètre de l'intégrale.
   — théorème de convergence dominé à paramètre continu. (parfois cette méthode est appliquée après la précédente)
5. **Un exemple fondamental : La Fonction Gamma** Γ : On définit la fonction Γ par

   $$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

   Vous devez savoir montrer les points suivants :
   (a) Γ est définie et continue sur $]0, +\infty[$
   (b) Γ est C^∞ sur $]0, +\infty[$
   (c) $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.
   (d) $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = n!$
   (e) Γ' croissante et il existe $c \in]1,2[, \Gamma'(c) = 0$. En déduire le tableau de variations.
   (f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty$ (on utilise une minoration à partir de (c))
   (g) $\Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$