Colle de **mathématiques**

Cette semaine, la colle doit se mettre sous la forme

1. une question de cours .
2. un exercice sur les intégrales à paramètres.
3. un exercice sur les espaces vectoriels normés.

1 Intégrales à paramètre

Vous devez savoir énoncer et appliquer les théorèmes suivants :

1. *Théorème de continuité des intégrales à paramètre* :
   Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{F}(I \times J, \mathbb{K})$.
   On suppose :
   1. $\forall t \in J, x \longmapsto f(x,t)$ est continue sur I.
   2. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
   3. *Hypothèse de domination* :
   — soit globale : $\exists \varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$
   — $\forall K = [a,b]$ segment inclus dans I, $\exists \varphi_K$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in [a,b] \times J, |f(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$
   Alors,
   $$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_J f(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \text{ est continue sur } I.$$
2. *Théorème de dérivabilité des intégrales à paramètre*, appelé aussi *Théorème de Leibniz* :
   Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$.
   On suppose :
   1. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.
   2. $\forall t \in J, x \longmapsto f(x,t)$ est C^1 sur I.
   Sa dérivée est notée $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et est à nouveau considérée comme fonction de deux variables :
   3. $\forall x \in I, t \longmapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
   4. *Hypothèse de domination* :
   — soit globale : $\exists \varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in I \times J, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi(t)$$
   — $\forall K = [a,b]$ segment inclus dans I, $\exists \varphi_K$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :
   $$\forall (x,t) \in K \times J, |\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$
   Alors,
   $$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_J f(x,t)\mathrm{d}t \end{array} \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } I \text{ et}$$
   $$\forall x \in I, g'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t$$
3. Soit un entier k supérieur ou égal à 1.
   On suppose :
   1. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J.
   2. $\forall t \in J, x \longmapsto f(x,t)$ est de classe C^k sur I.
   Ses dérivées successives sont notées $\dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}$ où $1 \leq i \leq k$ et est à nouveau considérée comme fonction de deux variables
   3. $\forall 1 \leq i \leq k-1,\ \forall x \in I, t \longmapsto \dfrac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)$ est continue par morceaux et intégrable sur J .
   4. $\forall x \in I, t \longmapsto \dfrac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)$ est continue par morceaux sur J .
   5. *Hypothèse de domination* :

— soit globale : $\exists\varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, |\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leq \varphi(t)$$

— soit locale : $\forall K$ segment inclus dans I, $\exists \varphi_K$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :

$$\forall (x,t) \in K \times J, |\frac{\partial^k f}{\partial x^k}(x,t)| \leq \varphi_K(t)$$

Alors,

$$g : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \int_J f(x,t)dt \end{array}$$ est de classe C^k sur I et

$$\forall 1 \leq i \leq k,\ \forall x \in I, g^{(i)}(x) = \int_J \frac{\partial^i f}{\partial x^i}(x,t)dt$$

4. *Théorème de convergence dominée à paramètre continu*
Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathcal{F}(I \times J, \mathbb{K})$, a un élément ou une borne finie ou non de I .
On suppose :
1. $\forall x \in I, t \longmapsto f(x,t)$ est continue par morceaux sur J.
2. $\forall t \in J, \lim\limits_{x \to a} f(x,t) = l(t)$.
3. $\forall x \in I, t \mapsto l(t)$ est continue par morceaux sur J.
4. *Hypothèse de domination* : $\exists\varphi$ intégrable sur J et à valeurs positives, telle que :

$$\forall (x,t) \in I \times J, |f(x,t)| \leq \varphi(t)$$

l est intégrable sur J et

$$\lim_{x \to a} \int_J f(x,t)\mathrm{d}t = \int_J l(t)\mathrm{d}t$$

On retiendra trois méthodes pour trouver une limite d'une fonction définie par une intégrale à paramètre :
— Encadrement et théorème des gendarmes.
— Changement de variable pour faire sortir le paramètre de l'intégrale.
— théorème de convergence dominé à paramètre continu. (parfois cette méthode est appliquée après la précédente)

5. **Un exemple fondamental : La Fonction Gamma** Γ : On définit la fonction Γ par

$$\Gamma : x \longmapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\mathrm{d}t$$

Vous devez savoir montrer les points suivants :
(a) Γ est définie et continue sur $]0, +\infty[$
(b) Γ est C^∞ sur $]0, +\infty[$
(c) $\forall x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*, \Gamma(n) = (n-1)!$.
(d) $\forall n \in \mathbb{N}, \displaystyle\int_0^{+\infty} t^n e^{-t}\mathrm{d}t = n!$
(e) Γ' croissante et il existe $c \in]1,2[, \Gamma'(c) = 0$. En déduire le tableau de variations.
(f) $\lim\limits_{x \to +\infty} \Gamma(x) = +\infty$ (on utilise une minoration à partir de (c))
(g) $\Gamma(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{1}{x}$

2 Espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre, vous devez savoir :

1. Démontrer qu'une application est une norme :
— soit en utilisant la définition d'une norme.
— soit en montrant qu'elle est issue d'un produit scalaire qu'il faut définir et montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. **connaître les normes usuelles dans** $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $C([a,b],\mathbb{K})$, $L^1_c(I,\mathbb{K})$, $L^2_c(I,\mathbb{R})$, c'est-à-dire savoir les définir et montrer que ce sont des normes.
3. **énoncé et démo de l'inégalité de Cauchy-Schwarz**, savoir l'appliquer aux produits scalaires usuelle de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. connaître les définitions concernant les boules ouvertes, fermées, sphères et les parties convexes.
5. Définition des normes équivalentes. Savoir que dans un espace vectoriel de dimension finie , toutes les normes sont équivalentes. Savoir démontrer que les normes usuelles dans $C([0,1],\mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes.