# Colle de **mathématiques**

Cette semaine, la colle doit se mettre sous la forme

1. une question de cours : un point en gras ci-dessous sur les evn
2. un exercice sur les espaces vectoriels normés.
3. un exercice sur la topologie parmi les exercices cités ci-dessous :

## 1 Espaces vectoriels normés

Dans ce chapitre, vous devez savoir :

1. Démontrer qu'une application est une norme :
   — soit en utilisant la définition d'une norme.
   — soit en montrant qu'elle est issue d'un produit scalaire qu'il faut définir et montrer qu'il s'agit bien d'un produit scalaire.
2. **connaître les normes usuelles dans** $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $C([a,b],\mathbb{K})$, $L^1_c(I,\mathbb{K})$, $L^2_c(I,\mathbb{R})$, c'est-à-dire savoir les définir et montrer que ce sont des normes. Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, **savoir montrer que** $A \mapsto \sqrt{\operatorname{tr}(A^T A)}$ **est une norme.**
3. **énoncé et démo de l'inégalité de Cauchy-Schwarz**, savoir l'appliquer aux produits scalaires usuelle de $\mathbb{R}^n$ et $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
4. connaître les définitions concernant les boules ouvertes, fermées, sphères et les parties convexes.
5. Définition des normes équivalentes. Savoir que dans un espace vectoriel de dimension finie , toutes les normes sont équivalentes. Savoir démontrer que les normes usuelles dans $C([0,1],\mathbb{R})$ ne sont pas équivalentes.
6. **Définition d'une suite de vecteurs convergente, cas particulier de suites de vecteurs d'un evn de dimension finie : il faut et il suffit d'étudier les suites coordonnées** (démo de ce résultat non exigible).

## 2 Topologie d'un espace vectoriel normé

Il faut connaître :

1. Définition de Point intérieur - Partie ouverte - Partie fermée de $E$.
2. Énoncé de la Caractérisation séquentielle d'une partie fermée.
3. Définition et caractérisation séquentielle d'un point adhérent. Déf de $\overline{A}$.
4. Définition d'une partie dense dans $E$.
5. Définition de $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ quand $f : A \in \mathcal{P}(E) \longrightarrow F$ et $a \in \overline{A}$.
6. Définition de la continuité de $f : A \in \mathcal{P}(E) \longrightarrow F$ où $a \in A$ : on retiendra surtout que $f$ est continue en $a$ lorsque $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$
7. Énoncé de la caractérisation séquentielle d'une limite ou de la continuité.
8. le théorème des bornes atteintes : Soit $f : A \to \mathbb{R}$ **continue** sur $A$ et $A$ une partie **fermée et bornée** de $E$.
   Alors $f$ est bornée sur $A$ et atteint ses bornes, c'est-à-dire :
   $$\exists a_0 \in A, \operatorname*{Sup}_{x\in A} f(x) = f(a_0)$$
   et
   $$\exists a_1 \in A, \operatorname*{Inf}_{x\in A} f(x) = f(a_1)$$
9. Les quatre types de fonctions continues à connaître : les fonction lipschitziennes, applications linéaires et bilinéaires dont les espaces du départ sont de dimension finie et les applications polynômiales en les coordonnées.

Les méthodes à connaître :

1. Comment montrer qu'une partie est un ouvert :
   — en revenant à la définition, surtout lorsqu'on veut le justifier géométriquement.
   — en montrant qu'elle est une réunion d'ouvert ou intersection finie d'ouverts.
   — en montrant qu'elle est le complémentaire d'un fermé.
   — en montrant qu'elle est de la forme $\{x \in E / f(x) < \alpha\}, \{x \in E / f(x) > \alpha\}$où $f$ est continue sur $E$ à valeurs réelles.
2. Comment montrer qu'une partie est un fermé :
   — complémentaire d'un ouvert (méthode peu usuelle).
   — surtout par la caractérisation séquentielle.
   — en montrant qu'elle est une réunion finie de fermés ou intersection finie de fermés.
   — en montrant qu'elle est de la forme $\{x \in E / f(x) = \alpha\}, \{x \in E / f(x) \leq \alpha\}, \{x \in E / f(x) \geq \alpha\}$où $f$ est continue sur $E$ à valeurs réelles.
   — Caractérisation séquentielle d'une partie fermée.

**Exercices sur la topologie à savoir refaire :**

1. **Tout espace vectoriel normé $E$ est à la fois un fermé et un ouvert de $E$ donc $\emptyset$ aussi.**
2. **Tout singleton est un fermé.**
3. **Toute boule fermée est un fermé.**
4. **Toute boule ouverte est un ouvert.**
5. **Tout intervalle du type** $[a,b]$, $[a,+\infty[$, $]-\infty,a]$ **est un fermé de** $\mathbb{R}$.
6. **Tout intervalle du type** $]a,b[$, $]a,+\infty[$, $]-\infty,a[$ **est un ouvert de** $\mathbb{R}$.
7. **Tout intervalle du type** $]a,b]$, $[a,b[$ **est ni fermé, ni ouvert de** $\mathbb{R}$.
8. $\mathbb{Q}$ **n'est pas un fermé de** $\mathbb{R}$.
9. $C^{\mathbb{Q}}_{\mathbb{R}}$ **n'est pas un fermé de** $\mathbb{R}$ **et donc** $\mathbb{Q}$ **n'est pas un ouvert de** $\mathbb{R}$.
10. $\mathbb{Q}$ **est dense dans** $\mathbb{R}$.
11. $GL_n(\mathbb{K})$ **est dense dans** $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
12. $GL_n(\mathbb{K})$ **est un ouvert de** $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
13. **L'application** $(x,y) \mapsto \frac{xy}{x^2+y^2}$ **n'a pas de limite en** $(0,0)$.
14. $\sin$ **est continue sur** $\mathbb{R}$.
15. $Id_E$ **est continue sur** $E$ **même si** $E$ **n'est pas de dimension finie.**
16. **Toute norme sur** $E$ **est une application continue sur** $E$.
17. **Soit** $P \in GL_n(\mathbb{K})$. $f : M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto PMP^{-1}$ **est continue sur** $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
18. $H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) / \operatorname{tr}(M) = 0\}$ **est un fermé de** $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
19. **Le produit scalaire est une application continue sur** $E \times E$ **quand** $E$ **est de dimension finie.**
20. $det$ **est continue sur** $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.