Programme de colles Quinzaine 10 (semaines du 11 et du 18 mars)

Chapitre 15 : Dénombrement et probabilités

Des définitions théoriques à savoir reconnaître dans les exemples concrets.

— Dénombrement : listes, arrangements et combinaisons d'éléments d'un ensemble fini.

— Probabilités : expérience aléatoire, issues, univers, événements, système complet d'événements, probabilité, probabilité conditionnelle.

Des résultats de cours à connaître pour identifier les situations dans lesquelles ils s'appliquent.

— Dénombrement : nombre de parties d'un ensemble, nombre de $p-$listes, de $p-$arrangements et de $p-$combinaisons.

— Probabilités : s'il y a équiprobabilité sur un univers fini, le calcul des probabilités se ramène à un problème de dénombrement ($\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

— Probabilités conditionnelles : probabilités composées, totales, formule de Bayes.

<u>Démonstrations à connaitre</u> :

— Soit Ω un ensemble fini. $|\mathcal{P}(\Omega)| = 2^{|\Omega|}$. *Deux démonstrations vues en classe : avec ou sans recurrence.* [$\star$]

— Formule de Pascal.

Chapitre 16 : EV de dimensions finies

On poursuit l'étude des EV, il faut être au clair sur le chapitre 13 pour bien comprendre !

— Un EV de dimension finie est un EV qui admet une famille génératrice finie. Tous les EV dont on connait des bases canoniques sont donc de dimensions finies.

— Une base est une famille libre et génératrice, si on a une famille qui est seulement génératrice on peut en extraire une base (th. de la base extraite) ; si on a une famille qui est seulement libre on peut la compléter en une base (th. de la base incomplète).

— Le théorème de la base extraite a pour conséquence de garantir l'existence de bases dans les EV de dimensions finies.

— Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice finie d'un espace E. $|\mathcal{F}|$ est une borne supérieur pour le cardinal des familles libres de E. En conséquence : toutes les bases de E ont même cardinal, c'est cet entier naturel non nul qu'on prend comme définition de la dimension de E (et on pose $\dim\{0\} = 0$ - c'est écrit sans flèches mais ce ne sont pas les mêmes zéros).

— Travailler dans un espace dont on connait la dimension permet de gagner du temps dans beaucoup de situations. Ainsi, dans un espace de dimension $n > 0$:
- une famille ayant strictement moins de n vecteurs ne peut pas être génératrice ;
- une famille ayant strictement plus de n vecteurs ne peut pas être libre ;
- pour qu'une famille de n vecteurs soit une base il suffit qu'elle soit libre **ou** qu'elle soit génératrice (une seule des deux conditions à prouver si la famille a le « bon » cardinal).

— Soit E un EV de dimension finie $n > 0$ et F un SEV de E.
- F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$;
- $E = F$ si, et seulement si, $\dim(F) = \dim(E)$;
- F admet <u>des</u> supplémentaires dont la dimension est $\dim(E) - \dim(F)$.
- Soit G un autre SEV de E. $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ (Grassmann).
- On savait déjà que F et G sont supplémentaires dans E si, et seulement si, $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$. On a le droit de remplacer une des deux conditions (celle qu'on veut) par une condition souvent plus simple à obtenir : $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

<u>Démonstrations :</u>

— Théorème de la base extraite.

— Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice finie d'un espace E. $|\mathcal{F}|$ est une borne supérieur pour le cardinal des familles libres de E [$\star$].

Ce programme est complété par une liste d'exercices qui sera abondée pour la 2è semaine.

3 formules de colle, au choix :

remédiation : une question de cours (pas une démonstration), puis un exercice de la liste qui a été préparé (on présente ses traces de recherche écrites, ça compte dans l'évaluation) puis un exercice au choix du colleur.

renforcement : une question de cours (éventuellement une démonstration mais sans [$\star$]), puis un exercice de la liste qui a été préparé (sans ses notes) puis un exercice au choix du colleur. Le nouvel exercice proposé est à rédiger sur feuille et à me présenter au TD qui suivra la colle.

performance : une question de cours puis un ou deux exercices au choix du colleur. Un des exercices est à rédiger sur feuille et à me remettre comme DM supplémentaire.

Exercices de la 1ère semaine

Exercice n° 1

Donner le nombres d'annagrammes du mot « alsaska ».

Exercice n° 2

On tire trois cartes dans un jeu de 32 cartes. Calculer les probabilités d'obtenir :

- un brelan ;
- deux piques et un trêfle ;
- trois cartes de la même couleur (couleur = trêfle, cœur, pique, carreau).

Exercice n° 3

Un questionnaire à choix multiples propose m réponses pour chaque question. Soit p la probabilité qu'un étudiant connaisse la bonne réponse à une question donnée. S'il ignore la réponse, il choisit au hasard l'une des réponses proposées. Quelle est pour le correcteur la probabilité qu'un étudiant connaisse vraiment la bonne réponse lorsqu'il l'a donnée ?

Exercice n° 4

Simple mais à savoir traiter sans et avec la dimension.
Trouver une base et un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x = y = z\}$.

Exercices supplémentaires pour la 2è semaine :