Programme de colles Quinzaine 11 (semaines du 25 mars et du 1er avril)

Chapitre 16 : EV de dimensions finies

On poursuit l'étude des EV, il faut être au clair sur le chapitre 13 pour bien comprendre !

— Un EV de dimension finie est un EV qui admet une famille génératrice finie. Tous les EV dont on connait des bases canoniques sont donc de dimensions finies.

— Une base est une famille libre et génératrice, si on a une famille qui est seulement génératrice on peut en extraire une base (th. de la base extraite) ; si on a une famille qui est seulement libre on peut la compléter en une base (th. de la base incomplète).

— Le théorème de la base extraite a pour conséquence de garantir l'existence de bases dans les EV de dimensions finies.

— Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice finie d'un espace E. $|\mathcal{F}|$ est un majorant pour le cardinal des familles libres de E. En conséquence : toutes les bases de E ont même cardinal, c'est cet entier naturel non nul qu'on prend comme définition de la dimension de E (et on pose $\dim\{0\} = 0$ - c'est écrit sans flèches mais ce ne sont pas les mêmes zéros).

— Travailler dans un espace dont on connait la dimension permet de gagner du temps dans beaucoup de situations. Ainsi, dans un espace de dimension $n > 0$:
- une famille ayant strictement moins de n vecteurs ne peut pas être génératrice ;
- une famille ayant strictement plus de n vecteurs ne peut pas être libre ;
- pour qu'une famille de n vecteurs soit une base il suffit qu'elle soit libre **ou** qu'elle soit génératrice (une seule des deux conditions à prouver si la famille a le « bon » cardinal).

— Soit E un EV de dimension finie $n > 0$ et F un SEV de E.
- F est de dimension finie et $\dim(F) \leq \dim(E)$;
- $E = F$ si, et seulement si, $\dim(F) = \dim(E)$;
- F admet des supplémentaires dont la dimension est $\dim(E) - \dim(F)$.
- Soit G un autre SEV de E. $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G)$ (Grassmann).
- On savait déjà que F et G sont supplémentaires dans E si, et seulement si, $F \cap G = \{0\}$ et $F + G = E$. On a le droit de remplacer une des deux conditions (celle qu'on veut) par une condition souvent plus simple à obtenir : $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

Démonstrations :

— Théorème de la base extraite.

— Soit $\mathcal{F}$ une famille génératrice finie d'un espace E. $|\mathcal{F}|$ est un majorant pour le cardinal des familles libres de E [$\star$].

Chapitre 17 : Intégration

On donne du sens aux intégrales qui ont été introduites l'an dernier d'un point de vue géométrique ; en particulier, on vient expliquer le lien entre surfaces et primitives qui est utilisé depuis la Terminale mais qui n'est pas intuitif. Les exercices de ce chapitre ne sont pas nouveaux (à part les sommes de Riemann) : on revoit les différentes techniques d'intégration (en visant l'assurance sur les changements de variables, rappeler la formule est toujours une bonne idée).

Concepts à comprendre dans ce chapitre :

— Définir l'intégrale des fonctions en escalier est simple, les propriétés *naturelles* de l'intégrale se prouvent facilement : linéarité, positivité, croissance et relation de Chasles.

— On approche globalement des fonctions continues par des fonctions en escalier sur des segments (la notion de norme infinie sera approfondie l'an prochain) et on définit l'intégrale des fonctions continues par ce biais. Les propriétés *naturelles* de l'intégrale sont toujours vraies mais plus difficiles à établir.

— Les sommes de Riemann permettent de voir l'intégrale comme une limite de suite ; d'un point de vue numérique cela s'appelle les méthodes des rectangles. Si on envisage les choses dans l'autre sens, la limite d'une somme de Riemann est une intégrale qu'on peut calculer.

— Le théorème fondamental de l'analyse donne le lien entre intégrale et primitive.
— Les formules de Taylor indiquent le lien entre une fonction régulière et le polynôme de Taylor :
  - la formule de Taylor avec reste intégral est globale : en tout point, on a une expression exacte du reste à l'aide d'une intégrale ;
  - l'inégalité de Taylor Lagrange est également globale : on a une majoration en tout point du module du reste. Cette majoration est plus simple à utiliser que le reste intégral ;
  - la formule de Taylor Young indique que le reste est localement négligeable.

Démonstrations à connaitre :
— Dans le cas des fonctions lipschiziennes, les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale [$\star$].
— Théorème fondamental de l'analyse [$\star$].
— Formule de Taylor avec reste intégral.
— Inégalité de Taylor Lagrange

Ce programme est complété par une liste d'exercices qui sera abondée pour la 2è semaine.

3 formules de colle, au choix :

remédiation : une question de cours (pas une démonstration), puis un exercice de la liste qui a été préparé (on présente ses traces de recherche écrites, ça compte dans l'évaluation) puis un exercice au choix du colleur.

renforcement : une question de cours (éventuellement une démonstration mais sans [$\star$]), puis un exercice de la liste qui a été préparé (sans ses notes) puis un exercice au choix du colleur. Le nouvel exercice proposé est à rédiger sur feuille et à me présenter au TD qui suivra la colle.

performance : une question de cours puis un ou deux exercices au choix du colleur. Un des exercices est à rédiger sur feuille et à me remettre comme DM supplémentaire.

Exercices de la 1ère semaine

Exercice n° 1

1. Démontrer que $\mathcal{B} = (X^2; (X-1)^2; (X+1)^2)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Donner les coordonnées de $X^2 + X + 1$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice n° 2

Donner un supplémentaire de $E = \{P \in \mathbb{K}_2[X] \ / \ P = XP'\}$ dans $\mathbb{K}_2[X]$.

Exercice n° 3

Donner une primitive de $f(x) = \dfrac{x^5+1}{4x^3+x^2+3x}$, pour $x > 0$.

Exercice n° 4

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_1^2 x\text{Arctan}(nx)\mathrm{d}x$.