

Programme de colles Quinzaine 12

(semaines du 8 et du 15 avril)

Chapitre 17 : Intégration

Savoirs-faire à maîtriser :

- Calculer une intégrale avec une primitive, par parties ou avec un changement de variables.
- Intégrer une fraction rationnelle.
- Donner une primitive avec une intégrale ; reconnaître qu'une telle fonction $(x \mapsto \int_a^x)$ est une primitive.
- Reconnaître une somme de Riemann.
- Utiliser les formules de Taylor.

Démonstrations à connaître :

- Dans le cas des fonctions lipschiziennes, les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale [★].
- Théorème fondamental de l'analyse [★].
- Formule de Taylor avec reste intégral.
- Inégalité de Taylor Lagrange

Chapitre 18 : Applications linéaires

On poursuit l'étude des EV avec les applications linéaires entre EV. Il est donc impératif d'être au clair sur les chapitres d'algèbre précédents.

Dans la suite, E et F sont des \mathbb{K} -EV, $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- une application linéaire est une application entre deux EV qui a la particularité de respecter les combinaisons linéaires. Il y a un vocabulaire nouveau à apprendre : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
- Le lien entre applications linéaires et SEV est fort : les images directes par u des SEV de E sont des SEV de F , les images réciproques par u (*quèsaco ?*) des SEV de F sont des SEV de E . Deux cas particuliers importants : le noyau de u et l'image de u .
- Endomorphismes remarquables d'un EV : homothéties, projections et symétries.
- Le rôle des bases est important. Soit $(e_i)_i$ une base de E
 - u est parfaitement définie par $(u(e_i))_i$. Autrement dit : si on connaît l'image d'une base, on connaît l'application ; on peut donc définir une application linéaire en donnant l'image d'une base.
 - u est injective ssi $(u(e_i))_i$ est libre.
 - u est surjective ssi $(u(e_i))_i$ est génératrice de F .
 - u est surjective ssi $(u(e_i))_i$ est une base de F .
- Rang d'une application linéaire, théorème du rang.

Démonstrations à connaître :

- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. u est injective ssi $\ker(u) = \{0_E\}$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est une projection ssi $u^2 = u$, c'est alors la projection sur $\text{Im}(u)$ parallèlement à $\ker(u)$. [★].
- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $(e_i)_{i \in [1;n]}$ une base de E . u est injective ssi $(u(e_i))_{i \in [1;n]}$ est libre.
- Théorème du rang.

Ce programme est complété par une liste d'exercices qui sera abondée pour la 2^e semaine.

3 formules de colle, au choix :

remédiation : une question de cours (pas une démonstration), puis un exercice de la liste qui a été préparé (on présente ses traces de recherche écrites, ça compte dans l'évaluation) puis un exercice au choix du colleur.

renforcement : une question de cours (éventuellement une démonstration mais sans [★]), puis un exercice de la liste qui a été préparé (sans ses notes) puis un exercice au choix du colleur. Le nouvel exercice proposé est à rédiger sur feuille et à me présenter au TD qui suivra la colle.

performance : une question de cours puis un ou deux exercices au choix du colleur. Un des exercices est à rédiger sur feuille et à me remettre comme DM supplémentaire.

Exercices de la 1ère semaine

Exercice n° 1

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x} dx$.

1. Prouver que (I_n) converge vers 0.
2. Pour $n \geq 0$, calculer $I_{n+1} + I_n$.
3. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^k}{k}$.

Exercice n° 2

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \prod_{k=1}^n \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice n° 3

On considère \mathbb{C} comme \mathbb{R} -espace vectoriel (c'est-à-dire que les scalaires sont réels) et l'application définie par $\phi(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\bar{z}$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de \mathbb{C} .
2. Montrer que ϕ est une projection de \mathbb{C} .
3. Déterminer les éléments caractéristiques de ϕ .

Exercice n° 4

On travaille dans \mathbb{R}^3 , on considère $A = \text{Vect}((1; 1; 1))$ et $B = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$.

1. Montrer que A et B sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
2. On note p la projection sur A parallèlement à B . Déterminer $p((1; 0; 0))$.
3. Soit $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p((x; y; z))$.