Programme de colles Quinzaine 12 (semaines du 8 et du 15 avril)

Chapitre 17 : Intégration

Savoirs-faire à maîtriser :

— Calculer une intégrale avec une primitive, par parties ou avec un changement de variables.
— Intégrer une fraction rationnelle.
— Donner une primitive avec une intégrale ; reconnaître qu'une telle fonction $(x \mapsto \int_a^x)$ est une primitive.
— Reconnaître une somme de Riemann.
— Utiliser les formules de Taylor.

Démonstrations à connaitre :

— Dans le cas des fonctions lipschiziennes, les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale [$\star$].
— Théorème fondamental de l'analyse [$\star$].
— Formule de Taylor avec reste intégral.
— Inégalité de Taylor Lagrange

Chapitre 18 : Applications linéaires

On poursuit l'étude des EV avec les applications linéaires entre EV. Il est donc impératif d'être au clair sur les chapitres d'algèbre précédents.

Dans la suite, E et F sont des $\mathbb{K}$-EV, $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

— une application linéaire est une application entre deux EV qui a la particularité de respecter les combinaisons linéaires. Il y a un vocabulaire nouveau à apprendre : endomorphisme, isomorphisme, automorphisme.
— Le lien entre applications linéaires et SEV est fort : les images directes par u des SEV de E sont des SEV de F, les images réciproques par u (*quèsaco ?*) des SEV de F sont des SEV de E. Deux cas particuliers importants : le noyau de u et l'image de u.
— Endomorphismes remarquables d'un EV : homothéties, projections et symétries.
— Le rôle des bases est important. Soit $(e_i)_i$ une base de E
  - u est parfaitement définie par $(u(e_i))_i$. Autrement dit : si on connait l'image d'une base, on connait l'application ; on peut donc définir une application linéaire en donnant l'image d'une base.
  - u est injective ssi $(u(e_i))_i$ est libre.
  - u est surjective ssi $(u(e_i))_i$ est génératrice de F.
  - u est surjective ssi $(u(e_i))_i$ est une base de F.
— Rang d'une application linéaire, théorème du rang.
— Equations linéaires : beaucoup de situations déjà rencontrées en sont, la structure de l'ensemble des solutions est toujours la même. Pour résoudre ces équations, on doit trouver une solution particulière et un noyau.
— Formes linéaires et hyperplans.

Démonstrations à connaitre :

— Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. u est injective ssi $\ker(u) = \{0_E\}$.
— Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. u est une projection ssi $u^2 = u$, c'est alors la projection sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\ker(u)$. [$\star$].
— Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une base de E. u est injective ssi $(u(e_i))_{i \in [\![1;n]\!]}$ est libre.
— Théorème du rang.

Ce programme est complété par une liste d'exercices qui sera abondée pour la 2è semaine.

3 formules de colle, au choix :

remédiation : une question de cours (pas une démonstration), puis un exercice de la liste qui a été préparé (on présente ses traces de recherche écrites, ça compte dans l'évaluation) puis un exercice au choix du colleur.

renforcement : une question de cours (éventuellement une démonstration mais sans [$\star$]), puis un exercice de la liste qui a été préparé (sans ses notes) puis un exercice au choix du colleur. Le nouvel exercice proposé est à rédiger sur feuille et à me présenter au TD qui suivra la colle.

performance : une question de cours puis un ou deux exercices au choix du colleur. Un des exercices est à rédiger sur feuille et à me remettre comme DM supplémentaire.

Exercices de la 1ère semaine

Exercice n° 1

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

1. Prouver que (I_n) converge vers 0.
2. Pour $n \geq 0$, calculer $I_{n+1} + I_n$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Exercice n° 2

Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{k^2}{n^2}\right)^{\frac{1}{n}}$.

Exercice n° 3

On considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel (c'est-à-dire que les scalaires sont réels) et l'application définie par $\phi(z) = \frac{1}{2}z + \frac{i}{2}\overline{z}$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que ϕ est une projection de $\mathbb{C}$.
3. Déterminer les éléments caractéristiques de ϕ.

Exercice n° 4

On travaille dans $\mathbb{R}^3$, on considère $A = \mathrm{Vect}((1;1;1))$ et $B = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y - z = 0\}$.

1. Montrer que A et B sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. On note p la projection sur A parallèlement à B. Déterminer $p((1;0;0))$.
3. Soit $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p((x;y;z))$.

Exercices supplémentaires pour la 2è semaine

Exercice n° 5

Soit $u : (x;y;z) \mapsto (2x+y+z; x-y; 2x+3z)$. u est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Exercice n° 6

Soit u, l'application qui, à tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$ associe le reste dans la division de P par $(X+1)$. Montrer que u est une projection de $\mathbb{R}_2[X]$ et préciser ses éléments caractéristiques.