Programme de colles Quinzaine 12 (semaines du 28/4 et du 5/5)

Chapitre 18 : Applications linéaires

On poursuit l'étude des EV avec les applications linéaires entre EV. Il est donc impératif d'être au clair sur les chapitres d'algèbre précédents. Dans la suite, E et F sont des $\mathbb{K}$-EV, $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

- une application linéaire est une application entre deux EV qui a la particularité de respecter les combinaisons linéaires.
- Le lien entre applications linéaires et SEV est fort : les images directes par u des SEV de E sont des SEV de F, les images réciproques par u (*quèsaco ?*) des SEV de F sont des SEV de E. Deux cas particuliers importants : le noyau de u et l'image de u.
- Endomorphismes remarquables d'un EV : homothéties, projections et symétries.
- En dimension finie, en exprimant les vecteurs dans des bases on comprend plus facilement les applications linéaires. Soit $(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une base de E :
  - u est parfaitement définie par $(u(e_i))_{i \in [\![1;n]\!]}$. Autrement dit : si on connait l'image d'une base, on connait l'application ; on peut donc créer une application linéaire en donnant l'image d'une base.
  - u est injective ssi $(u(e_i))_{i \in [\![1;n]\!]}$ est libre.
  - u est surjective ssi $(u(e_i))_{i \in [\![1;n]\!]}$ est génératrice de F.
  - u est bijective ssi $(u(e_i))_{i \in [\![1;n]\!]}$ est une base de F.
- Rang d'une application linéaire, théorème du rang.
- Equations linéaires : beaucoup de situations déjà rencontrées en sont, la structure de l'ensemble des solutions est toujours la même. Pour résoudre ces équations, on doit trouver une solution particulière et un noyau.
- Formes linéaires et hyperplans.

Démonstrations à connaitre :

- Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$. u est injective ssi $\ker(u) = \{0_E\}$.
- Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. u est une projection ssi $u^2 = u$, c'est alors la projection sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\ker(u)$ [$\star$].
- Soit $u \in \mathscr{L}(E, F)$, $(e_i)_{i \in [\![1;n]\!]}$ une base de E. u est injective ssi $(u(e_i))_{i \in [\![1;n]\!]}$ est libre.
- Théorème du rang [$\star$].

Déroulé de la colle :

1. une question de cours (une définition, une démonstration -hors [$\star$], présenter une fonction de référence...) ;
2. un des exercices proposé au verso ;
3. exercice au choix du colleur.

Les étudiants qui souhaitent une colle plus ambitieuse s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle). La colle commence alors par une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [$\star$]) puis un ou des exercices au choix du colleur.

Exercice n° 1

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

1. Prouver que (I_n) converge vers 0.
2. Pour $n \geq 0$, calculer $I_{n+1} + I_n$.
3. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$.

Exercice n° 2

On considère, pour $x \in \mathbb{R}$, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\ \mathrm{d}t$.

1. Justifier que F existe sur $\mathbb{R}$.
2. Etudier la parité de F.
3. Quel est le signe de $F(x)$ en fonction de x ?
4. Déterminer les variations de F.
5. Prouver que $F(x)$ admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice n° 3

Soit l'application $u : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ définie par $u(x;y;z) = (2x+y+z; x-y-2z)$.

1. Prouver que u est une application linéaire.
2. Enoncer le théorème du rang, en déduire que u n'est pas injective.
3. Déterminer $\mathrm{rg}(u)$, en déduire la dimension de $\ker(u)$.
4. Trouver une base de $\ker(u)$.

Exercice n° 4

On considère $\mathbb{C}$ comme $\mathbb{R}-$espace vectoriel (c'est-à-dire que les scalaires sont réels) et l'application définie par $\phi(z) = \frac{1}{2}z + \frac{\mathrm{i}}{2}\overline{z}$.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{C}$.
2. Montrer que ϕ est une projection de $\mathbb{C}$.
3. Déterminer les éléments caractéristiques de ϕ.

Exercices supplémentaires pour la 2è semaine

Exercice n° 5

En faisant apparaître une somme de Riemann, déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt[n]{2^k}$.

Exercice n° 6

Est-il possible de trouver un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}_3[X])$ tel que :

a) $\ker f = \mathrm{Vect}(X+1, X+2, X^2)$? Si oui, proposer un tel endomorphisme.

b) $\mathrm{Im}\ f = \mathrm{Vect}(X+1, X+2, X^2)$? Si oui, proposer un tel endomorphisme.

c) les deux conditions précédentes soient simultanément satisfaites ? Si oui, proposer un tel endomorphisme.

d) $\ker f = \mathrm{Im}\ f$? Si oui, proposer un tel endomorphisme.