

Programme de colles Quinzaine 13

(semaines du 4/5 et du 18/5)

Chapitre 18 : Applications linéaires

On poursuit l'étude des EV avec les applications linéaires entre EV. Il est donc impératif d'être au clair sur les chapitres d'algèbre précédents. Dans la suite, E et F sont des \mathbb{K} -EV, $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- une application linéaire est une application entre deux EV qui a la particularité de respecter les combinaisons linéaires.
- Le lien entre applications linéaires et SEV est fort : les images directes par u des SEV de E sont des SEV de F , les images réciproques par u (*quèsaco ?*) des SEV de F sont des SEV de E . Deux cas particuliers importants : le noyau de u et l'image de u .
- Endomorphismes remarquables d'un EV : homothéties, projections et symétries.
- En dimension finie, en exprimant les vecteurs dans des bases on comprend plus facilement les applications linéaires. Soit $(e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ une base de E :
 - u est parfaitement définie par $(u(e_i))_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$. Autrement dit : si on connaît l'image d'une base, on connaît l'application ; on peut donc créer une application linéaire en donnant l'image d'une base.
 - u est injective ssi $(u(e_i))_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est libre.
 - u est surjective ssi $(u(e_i))_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est génératrice de F .
 - u est bijective ssi $(u(e_i))_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est une base de F .
- Rang d'une application linéaire, théorème du rang.
- Equations linéaires : beaucoup de situations déjà rencontrées en sont, la structure de l'ensemble des solutions est toujours la même. Pour résoudre ces équations, on doit trouver une solution particulière et un noyau.
- Formes linéaires et hyperplans.

Démonstrations à connaître :

- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$. u est injective ssi $\ker(u) = \{0_E\}$.
- Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. u est une projection ssi $u^2 = u$, c'est alors la projection sur $\text{Im}(u)$ parallèlement à $\ker(u)$ [★].
- Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, $(e_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ une base de E . u est injective ssi $(u(e_i))_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ est libre.
- Théorème du rang [★].

Chapitre 19 : Variables aléatoires sur un univers fini

On revoit et on approfondit les notions vues en Terminale. Quelques nouveaux résultats : les inégalités de Markov et de Bienaymé Tchébychev ; la variance et la covariance.

Savoirs-faire à maîtriser :

- Donner la loi de probabilité d'une VA.
- Calculer l'espérance et la variance d'une VA dont on connaît la loi de probabilité.
- Reconnaître lorsqu'une VA suit une loi de référence (certaine, uniforme, Bernoulli ou binomiale).
- Mettre en œuvre les techniques et les notations vues dans le chapitre 15 (système complet d'événements et probabilités totales, probabilités conditionnelles et probabilités composées...)

Trois types de colles sont proposés :

- Normal : une question de cours (une définition, une démonstration -hors [★]) ; un des exercices proposé ci-après ; un exercice au choix du colleur.
 - Etoile : une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [★]) puis un ou des exercices au choix du colleur. Les étudiants qui souhaitent ce type de colle s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle).
 - ENAC pour Arzhela, Paul et Simon : un des exercices est sous forme de QCM sur des probabilités, ou bien l'intégration d'une fraction rationnelle (dans l'esprit des annales).
-

Exercice n° 1

Est-il possible de trouver un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X])$ tel que :

- $\ker f = \text{Vect}(X + 1, X + 2, X^2)$? Si oui, proposer un tel endomorphisme.
- $\text{Im } f = \text{Vect}(X + 1, X + 2, X^2)$? Si oui, proposer un tel endomorphisme.
- les deux conditions précédentes soient simultanément satisfaites? Si oui, proposer un tel endomorphisme.
- $\ker f = \text{Im } f$? Si oui, proposer un tel endomorphisme.

Exercice n° 2

On travaille dans \mathbb{R}^3 , on considère $A = \text{Vect}((1; 1; 1))$ et $B = \{(x; y; z) \in \mathbb{R}^3 / 2x + y - z = 0\}$.

- Montrer que A et B sont supplémentaires dans \mathbb{R}^3 .
- On note p la projection sur A parallèlement à B . Déterminer $p((1; 0; 0))$.
- Soit $(x; y; z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p((x; y; z))$.

Exercice n° 3

Soit $u : (x; y; z) \mapsto (2x + y + z; x - y; 2x + 3z)$. u est-il un automorphisme de \mathbb{R}^3 ?

Exercice n° 4

On dispose d'un dé équilibré à 4 faces dont les faces sont numérotées de 0 à 3 ainsi qu'une pièce de monnaie équilibrée dont les faces sont numérotées 0 et 1.

On lance simultanément la pièce et le dé, on appelle Z le produit de leurs résultats.

- Donner la loi de Z .
- On décide de créer un jeu d'argent avec cette expérience. Pour participer, le joueur doit payer 1 euro, il reçoit Z^2 euros. Le joueur a-t-il intérêt à jouer?

Exercice n° 5

On lance simultanément deux dés équilibrés et on appelle X le maximum des résultats obtenus.

Déterminer $E(X)$ puis $V(X)$.