Programme de colles Quinzaine 12 (semaines du 13 et du 20 mai)

Chapitre 18 : Applications linéaires

Démonstrations à connaitre :

- Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$. u est injective ssi $\ker(u) = \{0_E\}$.
- Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. u est une projection ssi $u^2 = u$, c'est alors la projection sur $\mathrm{Im}(u)$ parallèlement à $\ker(u)$. [$\star$].
- Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, $(e_i)_{i\in[\![1;n]\!]}$ une base de E. u est injective ssi $(u(e_i))_{i\in[\![1;n]\!]}$ est libre.
- Théorème du rang.

Chapitre 19 : Séries

Un chapitre technique dans lequel il faut maîtriser le vocabulaire spécifique et bien faire la différence entre les objets manipulés. Etant donnée une suite de scalaires (souvent réels) $(u_n)_n$ on s'intéresse à une autre suite : $\left(\sum_{k=0}^n u_k\right)_n$. Cette seconde suite s'appelle *série*, ses termes s'appellent *sommes partielles*, on dit que u_n est le *terme général* de la série.

L'objet principal du chapitre est de déterminer si la série converge ou non (sa *nature*) en étudiant son terme général. Lorsqu'elle converge, sa limite s'appelle *somme* et, sauf cas particulier, on ne s'intéresse pas à sa valeur.

Savoirs-faire à maîtriser :

- Connaître les exemples de références : série géométrique, série harmonique et série harmonique alternée, séries de Riemann.
- Reconnaître la divergence grossière.
- Si on a une SATP alors on peut utiliser les comparaisons sur le terme général.
- Si le signe n'est pas constant, on peut utiliser la convergence absolue qui implique la convergence.

Démonstrations à connaitre :

- Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des SATP telles que $u_n = O(v_n)$.
  Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ aussi.
- La série harmonique diverge.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$. [$\star$]

Ce programme est complété par une liste d'exercices qui sera abondée pour la 2è semaine.

3 formules de colle, au choix :

remédiation : une question de cours (pas une démonstration), puis un exercice de la liste qui a été préparé (on présente ses traces de recherche écrites, ça compte dans l'évaluation) puis un exercice au choix du colleur.

renforcement : une question de cours (éventuellement une démonstration mais sans [$\star$]), puis un exercice de la liste qui a été préparé (sans ses notes) puis un exercice au choix du colleur. Le nouvel exercice proposé est à rédiger sur feuille et à me présenter au TD qui suivra la colle.

performance : une question de cours puis un ou deux exercices au choix du colleur. Un des exercices est à rédiger sur feuille et à me remettre comme DM supplémentaire.

Exercices de la 1ère semaine

Exercice n° 1

Soit, pour $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}\mathrm{d}x$.

1. Prouver que (I_n) converge vers 0.
2. Pour $n \geq 0$, calculer $I_{n+1} + I_n$.
3. En déduire que la série harmonique alternée converge et préciser sa somme.

Exercice n° 2

On travaille dans $\mathbb{R}^3$, on considère $A = \mathrm{Vect}((1;1;1))$ et $B = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y - z = 0\}$.

1. Montrer que A et B sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. On note p la projection sur A parallèlement à B. Déterminer $p((1;0;0))$.
3. Soit $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p((x;y;z))$.

Exercice n° 3

Soit $u : (x;y;z) \mapsto (2x+y+z; x-y; 2x+3z)$. u est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Exercice n° 4

On considère $\displaystyle\sum_{n \geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

1. Justifier que la série est convergente.
2. Après avoir fait une décomposition en éléments simples, donner la valeur de sa somme.