Programme de colles Quinzaine 13 (semaines du 12/5 et du 19/5)

Chapitre 19 : Variables aléatoires sur un univers fini
On revoit et on approfondit les notions vues en Terminale. Quelques nouveaux résultats : les inégalités de Markov et de Bienaymé Tchébychev ; la variance et la covariance.

Savoirs-faire à maîtriser :
- Donner la loi de probabilité d'une VA.
- Calculer l'espérance et la variance d'une VA dont on connait la loi de probabilité.
- Reconnaître lorsqu'une VA suit une loi de référence (certaine, uniforme, Bernoulli ou binomiale).
- Mettre en œuvre les techniques et les notations vues dans le chapitre 15 (système complet d'événements et probabilités totals, probabilités conditionnelles et probabilités composées...)

Chapitre 20 : Séries
Un chapitre technique dans lequel il faut maîtriser le vocabulaire spécifique et bien faire la différence entre les objets manipulés : étant donnée une suite de scalaires (souvent réels) $(u_n)_n$ on s'intéresse à une autre suite : $\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)_n$. Cette seconde suite s'appelle *série*, ses termes s'appellent *sommes partielles*, on dit que u_n est le *terme général* de la série.

L'objet principal du chapitre est de déterminer si la série converge ou non (sa *nature*) en étudiant son terme général. Lorsqu'elle converge, sa limite s'appelle *somme* et, sauf cas particulier, on ne s'intéresse pas à sa valeur.

Savoirs-faire à maîtriser :
- Connaître les exemples de références : série géométrique, série harmonique et série harmonique alternée, séries de Riemann, série exponentielle.
- Reconnaître la divergence grossière.
- Si on a une SATP alors on peut utiliser les comparaisons sur le terme général. Il y a alors deux stratégies : on compare à une autre suite globalement ($\forall n$) ou alors de façon asymptotique (avec des O, des o ou encore des $\sim$ qu'on peut obtenir avec des DL).
- Si le signe n'est pas constant, on peut utiliser la convergence absolue qui implique la convergence.

Démonstrations à connaitre :
- Nature des séries géométriques.
- Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des SATP telles que $u_n = O(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ aussi.
- La série harmonique diverge.
- $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$. [$\star$]

Déroulé de la colle :

1. une question de cours (une définition, une démonstration -hors [$\star$], présenter une fonction de référence...) ;
2. un des exercices proposé au verso ;
3. exercice au choix du colleur.

Les étudiants qui souhaitent une colle plus ambitieuse s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle). La colle commence alors par une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [$\star$]) puis un ou des exercices au choix du colleur.

Exercice n° 1

On travaille dans $\mathbb{R}^3$, on considère $A = \mathrm{Vect}((1;1;1))$ et $B = \{(x;y;z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ 2x + y - z = 0\}$.

1. Montrer que A et B sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.
2. On note p la projection sur A parallèlement à B. Déterminer $p((1;0;0))$.
3. Soit $(x;y;z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p((x;y;z))$.

Exercice n° 2

Soit $u : (x;y;z) \mapsto (2x + y + z; x - y; 2x + 3z)$. u est-il un automorphisme de $\mathbb{R}^3$?

Exercice n° 3

On dispose d'un dé équilibré à 4 faces dont les faces sont numérotées de 0 à 3 ainsi qu'une pièce de monnaie équilibrée dont les faces sont numérotées 0 et 1.
On lance simultanément la pièce et le dé, on appelle Z le produit de leurs résultats.

1. Donner la loi de Z.
2. On décide de créer un jeu d'argent avec cette expérience. Pour participer, le joueur doit payer 1 euro, il reçoit Z^2 euros. Le joueur a-t-il intérêt à jouer ?

Exercice n° 4

On considère $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

1. Justifier que la série est convergente.
2. Décomposer $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ en éléments simples.
3. En faisant apparaître un télescopage, donner la valeur de la somme de la série.

Exercices supplémentaires pour la 2è semaine