Programme de colles Quinzaine 14 (semaines du 26/5 et du 2/6)

Chapitre 20 : Séries

Savoirs-faire à maîtriser :

- Connaître les exemples de références : série géométrique, série harmonique et série harmonique alternée, séries de Riemann, série exponentielle.
- Reconnaître la divergence grossière.
- Si on a une SATP alors on peut utiliser les comparaisons sur le terme général. Il y a alors deux stratégies : on compare à une autre suite globalement ($\forall n$) ou alors de façon asymptotique (avec des O, des o ou encore des $\sim$ qu'on peut obtenir avec des DL).
- Si le signe n'est pas constant, on peut utiliser la convergence absolue qui implique la convergence.

Démonstrations à connaitre :

- Nature des séries géométriques.
- Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ des SATP telles que $u_n = O(v_n)$. Si $\sum v_n$ converge alors $\sum u_n$ aussi.
- La série harmonique diverge.
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$. [$\star$]
- $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\ln(2)$. [$\star$]

Chapitre 21 : matrice d'une application linéaire

Dans ce chapitre, on peut faire la confusion entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

E et F sont des $\mathbb{K}$-EV de dimensions finies dont des bases sont $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. On considère $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

Lien entre matrices et applications linéaires :

- En utilisant les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ on peut représenter les vecteurs de E et F par des colonnes (de taille $n = \dim(E)$ et $p = \dim(F)$). Si on considère un vecteur x de E notons X la colonne des coordonnées de x dans $\mathcal{B}_E$.
- On définit la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ par colonnes : ses colonnes sont les images des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ par u, exprimés dans $\mathcal{B}_F$.
- Les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ étant fixées l'application qui à u associe la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ réalise un isomorphisme d'EV entre $\mathscr{L}(E, F)$ et $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.
- Si on change les bases, on change de matrice : on donc (potentiellement) plusieurs matrices qui représentent la même application linéaire. Dans le cas d'endomorphismes (et donc de matrices carrées), on dit que les matrices sont semblables.
- Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. L'application linéaire canoniquement associée à A est $X \mapsto AX$. (Avec $X \in \mathbb{K}^p$ et $AX \in \mathbb{K}^n$).
- En utilisant l'application linéaire canoniquement associée à une matrice, on définit le noyau, l'image et le rang d'une matrice.
  On « transporte » le théorème du rang de $\mathscr{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$: $p = \mathrm{rg}(A) + \dim(\ker(A))$.

D'un point de vue pratique :

- déterminer l'image d'un vecteur x par u correspond à multiplier X à gauche par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$;
- composer des applications linéaires correspond à multiplier leurs matrices (attention aux bases et à l'ordre du produit : il est conseillé d'écrire les diagrammes).
- Changer de base correspond à changer de point de vue sur les vecteurs. Par exemple, si $x \in E$ est représenté par X dans $\mathcal{B}_E$ et par X' dans $\mathcal{B}'_E$: on aura $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E)X'$.
  La matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'_E,\mathcal{B}_E}(\mathrm{Id}_E)$ est une matrice de passage.
- Les colonnes de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ correspondent aux images des vecteurs de $\mathcal{B}_E$ par u, elles constituent donc une famille génératrice de $\mathrm{Im}(u)$. Si on veut en extraire une base, on peut appliquer l'algorithme de Gauss sur les colonnes.
- Déterminer le noyau de u revient à résoudre l'équation $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)X = 0$, c'est-à-dire un système linéaire *(de quelle taille ?)*. On le résout en appliquant l'algorithme de Gauss sur les lignes.
- u est un isomorphisme ssi $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est inversible. En pratique : on calcule le rang de $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ en utilisant l'algorithme de Gauss sur les lignes et les colonnes, on a inversibilité ssi il vaut $\dim(E) = \dim(F)$.

Déroulé de la colle :

1. une question de cours (une définition, une démonstration -hors [$\star$], présenter une fonction de référence...) ;
2. un des exercices proposé au verso ;
3. exercice au choix du colleur.

Les étudiants qui souhaitent une colle plus ambitieuse s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle). La colle commence alors par une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [$\star$]) puis un ou des exercices au choix du colleur.

Exercice n° 1

On considère $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$.

1. Justifier que la série est convergente.
2. Décomposer $\dfrac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ en éléments simples.
3. En faisant apparaître un télescopage, donner la valeur de la somme de la série.

Exercice n° 2

On travaille dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
Déterminer, relativement à la base $(\vec{i}, \vec{j})$ les matrices de :

— L'homothétie vectorielle de rapport 3 ;
— La projection sur la droite $y = x$ parallèlement à $\mathrm{Vect}(\vec{i} - \vec{j})$;
— La rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{2}$;
— La rotation vectorielle d'angle $\frac{\pi}{6}$

Exercice n° 3

Soit u, l'endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ défini par $u(P) = 2XP' + (1 - X^2)P''$.

1. Déterminer la matrice de u relativement à la base canonique.
2. En déduire $\mathrm{rg}(u)$, $\mathrm{Im}(u)$ et $\ker(u)$.

Exercice n° 4

Soit $n \geq 1$. On travaille dans $\mathbb{R}_n[X]$ et on considère l'endomorphisme u défini par $u(P(X)) = P(X+1)$.

1. Déterminer $\mathrm{Mat}_{can}(u)$.
2. Justifier que $\mathrm{Mat}_{can}(u)$ est inversible.
3. Sans faire de calcul, déterminer la matrice inverse de $\mathrm{Mat}_{can}(u)$.

Exercice supplémentaire pour la 2è semaine

Exercice n° 5

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère p la projection sur la droite d : $\mathrm{Vect}(1;2;3)$ et parallèlement au plan P d'équation $x + y + z = 0$.

1. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = d \oplus P$, on la note B.
2. Ecrire la matrice de p dans la base B.
3. En déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.