Programme de colles Quinzaine 15 (semaines du 9 et du 16 juin)

Chapitre 22 : Espaces préhilbertiens
On généralise les notions de produit scalaire et d'orthogonalité, usuelles dans la géométrie du plan et de l'espace. On travaille dans un espace vectoriel réel E.

Des notions nouvelles à connaitre de façon précise :

— Définition d'un produit scalaire, produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{C}^0([a;b])$. On privilégie la notation $< x, y >$.
— Norme euclidienne et ses propriétés : séparation, homogénéité. Calculs usuels : $\|x \pm y\|^2 = \dots$ on en déduit $< x, y >$ et $\|x\|^2 + \|y\|^2$ en fonction de $\|x+y\|^2$ et $\|x-y\|^2$.
— L'inégalité de Cauchy Schwarz permet d'établir que la norme euclidienne vérifie l'inégalité triangulaire.
— L'orthogonalité de deux vecteurs est la nullité du produit scalaire ; l'orthogonal d'une partie non vide A de E est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A, on la note $A^\perp$. $A^\perp$ est un SEV de E.
— Familles orthogonales, orthonormées. Une famille orthogonale qui ne contient pas le vecteur nul est libre.
— Théorèmes de Pythagore : pour deux vecteurs on a une équivalence, pour $n > 2$ vecteurs on a une implication.
— En dimension finie, il existe des bases qui sont orthonormées. Les coordonnées sont simples à obtenir : si $(e_i)_{[\![1;n]\!]}$ est une BON alors tout vecteur x s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$. Avec les coordonnées dans une BON, calculer les produits scalaires (et donc les normes) devient simple.
— Soit F un SEV de dimension finie de E. F admet un unique supplémentaire orthogonal qui est $F^\perp$. Ceci permet de définir la projection orthogonale sur F (les projections sont simples à calculer en travaillant dans une BON de F).
— Travailler dans une BON est donc pratique ; reste à en avoir une. C'est l'objet de l'algorithme de Gram Schmidt qui permet d'orthonormaliser une famille libre.

Démonstrations à connaitre :

— Inégalité de Cauchy Schwarz.
— Inégalité de Cauchy Schwarz avec le cas d'égalite [$\star$].
— Si $A \subset E$ alors $A^\perp$ est un SEV de E.
— Preuve de l'existence de BON dans un espace euclidien de dimension n par récurrence sur n [$\star$].

Savoirs-faire à maîtriser :

— Décider si une application est un produit scalaire ou non.
— Calculer dans un espace préhibertien (en particulier s'il y a un produit scalaire usuel).
— Appliquer l'algorithme de Gram Schmidt en petite dimension.

Le début du chapitre sur les déterminants sera ajouté pour la toute dernière semaine.

Déroulé de la colle :

1. une question de cours (une définition, une démonstration -hors [$\star$], présenter une fonction de référence...) ;
2. un des exercices proposé au verso ;
3. exercice au choix du colleur.

Les étudiants qui souhaitent une colle plus ambitieuse s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle). La colle commence alors par une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [$\star$]) puis un ou des exercices au choix du colleur.

Exercices de la 1ère semaine

Exercice n° 1

Après avoir précisé sa nature, donner un équivalent de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n}}$.

Exercice n° 2

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère p la projection sur la droite d : $\mathrm{Vect}(1;2;3)$ et parallèlement au plan P d'équation $x+y+z=0$.

1. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = d \oplus P$, on la note B.
2. Ecrire la matrice de p dans la base B.
3. En déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice n° 3

On considère les fonctions $a(x) = \cos(x)$, $b(x) = \sin(x)$, $c(x) = x\cos(x)$, et $d(x) = x\sin(x)$.
Soit $E = \mathrm{Vect}(a, b, c, d)$.

1. Quelle est la dimension de E ?
2. Montrer que l'application $D : \left\{ \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ f & \mapsto & f' \end{array} \right.$ est un automorphisme de E.
3. Déterminer le noyau et l'image de $D^2 + \mathrm{Id}_E$.
4. Sans poser de calcul, donner la valeur de $D^4 + 2D^2 + \mathrm{Id}_E$.
5. En déduire, à nouveau, que D est bijective. Que vaut D^{-1} ?

Exercice n° 4

1. Prouver que $< P, Q >= \displaystyle\int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Fournir une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.