Ultime programme de colles (semaines du 8 et du 15 juin)

Chapitre 21 : matrices et applications linéaires
Changement de base et matrices de passage.

Chapitre 22 : Espaces préhilbertiens
On généralise les notions de produit scalaire et d'orthogonalité, usuelles dans la géométrie du plan et de l'espace. On travaille dans un espace vectoriel réel E.

Des notions nouvelles à connaitre de façon précise :

— Définition d'un produit scalaire, produits scalaires usuels sur $\mathbb{R}^n$, $\mathscr{C}^0([a;b])$. On privilégie la notation $< x, y >$.
— Norme euclidienne et ses propriétés : séparation, homogénéité. Calculs usuels : $\|x \pm y\|^2 = \dots$ on en déduit $< x, y >$ et $\|x\|^2 + \|y\|^2$ en fonction de $\|x+y\|^2$ et $\|x-y\|^2$.
— L'inégalité de Cauchy Schwarz permet d'établir que la norme euclidienne vérifie l'inégalité triangulaire.
— L'orthogonalité de deux vecteurs est la nullité du produit scalaire ; l'orthogonal d'une partie non vide A de E est l'ensemble des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de A, noté $A^\perp$, c'est un SEV de E.
— Familles orthogonales, orthonormées. Une famille orthogonale qui ne contient pas le vecteur nul est libre.
— Théorèmes de Pythagore : pour deux vecteurs on a une équivalence, pour $n > 2$ vecteurs on a une implication.
— En dimension finie, il existe des bases qui sont orthonormées. Les coordonnées sont simples à obtenir : si $(e_i)_{[\![1;n]\!]}$ est une BON alors tout vecteur x s'écrit $x = \sum_{i=1}^{n} < x, e_i > e_i$. Avec les coordonnées dans une BON, calculer les produits scalaires (et donc les normes) devient simple.
— Soit F un SEV de dimension finie de E. F admet un unique supplémentaire orthogonal qui est $F^\perp$. Ceci permet de définir la projection orthogonale sur F (les projections sont simples à calculer en travaillant dans une BON de F).
— Travailler dans une BON est donc pratique ; reste à en avoir une. C'est l'objet de l'algorithme de Gram Schmidt qui permet d'orthonormaliser une famille libre.

Démonstrations à connaitre :

— Formules usuelles $\|x \pm y\|^2 = \dots$
— Inégalité de Cauchy Schwarz.
— Une famille orthogonale qui ne comporte pas de vecteurs nuls est libre.
— Inégalité de Cauchy Schwarz avec le cas d'égalite [$\star$].
— Preuve de l'existence de BON dans un espace euclidien de dimension n par récurrence sur n [$\star$].

Savoirs-faire à maîtriser :

— Décider si une application est un produit scalaire ou non.
— Calculer dans un espace préhibertien (en particulier s'il y a un produit scalaire usuel).
— Appliquer l'algorithme de Gram Schmidt en petite dimension.

Chapitre 23 : Déterminants
On travaille dans un $\mathbb{K}-$espace vectoriel E de dimension finie n muni d'une base $B = (e_1, \dots, e_n)$.
Des notions nouvelles à connaitre de façon précise :

— Il existe une unique application $E^n \to \mathbb{K}$ qui soit linéaire sur chaque composante, alternée et qui vérifie $B \mapsto 1$, on l'appelle déterminant dans la base B et on la note $\det_B$.
— La linéarité sur chaque composante et le caractère alterné impliquent l'antisymétrie ; en dimensions 2 et 3 on obtient des formules explicites qui prouvent l'existence et l'unicité du déterminant dans la base B. Pour les dimensions supérieures, l'existence et l'unicité est admise.
— Le déterminant permet de caractériser les bases : la famille (x_i) est une base ssi $\det_B(x_1, \dots, x_n) \neq 0$ (quelle que soit la base B).
— Pour $f \in \mathscr{L}(E)$,$\det_B(f(e_1), \dots, f(e_n))$ ne dépend pas de B, on l'appelle déterminant de f.
— Le déterminant permet de caractériser les automorphismes : l'endomorphisme f est un automorphisme ssi $\det(f) \neq 0$.
Déterminant d'une matrice et techniques de calcul uniquement la 2e semaine.
— Pour $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, le déterminant de M est le déterminant de la famille des colonnes de M (vues comme vecteurs de $\mathbb{K}^n$). C'est aussi le déterminant de l'endomorphisme canoniquement associé à M.

— M est inversible ssi $\det(M) \neq 0$.

Techniques de calcul à maîtriser :

— Le déterminant peut se calculer en faisant des opérations élémentaires sur les lignes et/ou les colonnes (attention : les dilatations et les permutations changent la valeur du déterminant).

— Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

— On peut développer par rapport à une ligne ou à une colonne.

— Parfois, il est clair que le déterminant est nul (une ligne ou une colonne de zéros, une ligne ou une colonne combinaison linéaire des autres...).

Démonstrations à connaître :

— Si $n = 2$ la définition du produit scalaire dans B entraine $\det_B(x_1e_1 + x_2e_2; y_1e_1 + y_2e_2) = x_1y_2 - x_2y_1$.

— Si $\phi : E^n \to \mathbb{K}$ est linéaire en chaque composante et alternée alors ϕ est un multiple de $\det_B$.[$\star$]

— Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ et B une base de E. Le scalaire $\det_B(f(B))$ ne dépend pas de la base B. [$\star$]

Trois types de colles sont proposés :

— Normal : une question de cours (une définition, une démonstration -hors [$\star$]) ; un des exercices proposé ci-après ; un exercice au choix du colleur.

— Etoile : une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [$\star$]) puis un ou des exercices au choix du colleur. Les étudiants qui souhaitent ce type de colle s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle).

— ENAC pour Arzhela et Simon : un des exercices est sous forme de QCM sur des séries (dans l'esprit des annales).

Exercice n° 1

Dans $\mathbb{R}^3$, on considère p la projection sur la droite d : $\mathrm{Vect}(1; 2; 3)$ et parallèlement au plan P d'équation $x + y + z = 0$.

1. Donner une base de $\mathbb{R}^3$ adaptée à $\mathbb{R}^3 = d \oplus P$, on la note B.
2. Ecrire la matrice de p dans la base B.
3. En déduire la matrice de p dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

Exercice n° 2

1. Prouver que $< P, Q >= \int_0^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{d}x$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Fournir une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ pour ce produit scalaire.

Exercice n° 3

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de son produit scalaire usuel, on considère le plan $P : 2x + y - z = 0$.

1. Donner une base orthonormée de P.
2. Calculer la distance entre $u(1; 1; 1)$ et P.

Exercice n° 4

Les matrices suivantes sont-elles inversibles ?

Pas de calcul de déterminant 4x4 en début de 1ère semaine.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = ((-1)^{i+j})_{1 \leq i,j \leq 4} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$