Programme de colles Quinzaine 2 (semaines du 29/9 et du 6/10)

Chapitre 2 : Calculer dans $\mathbb{C}$
Premier chapitre sur les nombre complexes, le lien avec la géométrie du plan est crucial : toutes les notions vues s'interprètent géométriquement.

Connaissances à mémoriser :
- Vocabulaire des complexes : parties réelle et imaginaire, forme algébrique, module, arguments (d'un complexe non nul), argument principal.
- Nombres complexes de module 1, forme exponentielle d'un complexe (non nul), propriétés de l'argument.
- Formules d'Euler et de Moivre.

Savoirs-faire à maîtriser :
- calculer avec les complexes, par exemple pour résoudre une équation, trouver une forme algébrique...
- Linéariser et délinéariser des expressions trigonométriques ; factoriser avec l'angle moitié.

Démonstrations à connaitre :
- Si z et z' sont deux complexes, on a $|zz'| = |z||z'|$.
- Inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$ (sans le cas d'égalité).

Chapitre 3 : Généralités sur les fonctions et nouvelles fonctions de référence
Ce chapitre commence par une partie théorique sur les application pour aboutir aux notions de bijection et d'application réciproque.
Une première application des bijections est la résolution d'équations par équivalences, on comprend l'importance d'utiliser des quantificateurs. On revoit ensuite des choses connues : calcul de dérivées (on rajoute les composées), applications à l'étude des variations, plan d'étude d'une fonction.
On finit par un catalogue de fonctions de référence, qui en comporte de nouvelles. En particulier, la valeur absolue est LE contre-exemple pour bien comprendre qu'une fonction peut être continue sans être dérivable ; la partie entière ; les fonctions trigonométriques réciproques (*de quoi ?*) ; fonctions puissances et exponentielles de base a.

Connaissances à mémoriser :
- Des définitions précises (applications surjectives, injectives, bijectives ; parité des fonctions ; variations des fonctions).
- La composition des fonction : ce dont il s'agit, formule pour dériver une composée.
- *À partir du mardi 7 :* des fonctions de référence dont il faut connaître les définitions, les courbes représentatives et les propriétés.

Savoirs-faire à maîtriser :
- Penser aux quantificateurs. *Quand ? Tout le temps !*
- Etudier une fonction *(note pour les colleurs : on n'a pas revu les limites, on s'appuie sur les connaissances de Terminale).*
- savoir utiliser les fonctions trigonométriques réciproques.

Démonstrations à connaitre :
- Si $f : A \to B$ et $g : B \to C$ sont surjectives alors $g \circ f : A \to C$ est surjective.
- La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$, sur $\mathbb{R}^{-*}$ mais pas sur $\mathbb{R}^*$.
- $\forall x \in]-1;1[,\ \text{Arccos}'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$ *(note pour les colleurs : on justifie la dérivabilité graphiquement par l'absence de tangentes horizontales à $y = \cos(x)$ pour $x \in]0;\pi[$).*

Pour cette deuxième quinzaine, la colle se déroulera de la façon suivante :

1. une question de cours (une définition, une démonstration, présenter une fonction de référence...) ;
2. un des exercices proposé ci-après ;
3. exercice au choix du colleur.

Exercice n° 1

Résoudre $\overline{z} = z^3$

Exercice n° 2

Etudier et représenter graphiquement la fonction $f(x) = \sqrt{\dfrac{2-2x}{3+x^2}}$.

Exercice n° 3

Soit, pour $x \in \mathbb{R}^+$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

1. Prouver que f réalise une bijection entre $\mathbb{R}^+$ et un intervalle I à déterminer.
2. Donner une expression de f^{-1}.

Exercice n° 4

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{C}$ suivants :

$$D = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| < 1\} \qquad \text{et} \qquad H = \{z \in \mathbb{C} \ / \ \mathrm{Im}(z) > 0\}$$

ainsi que l'application h définie sur D par :

$$\forall z \in D,\ h(z) = \frac{z - \mathrm{i}}{z + \mathrm{i}}$$

1. Prouver que h est bien définie sur H et que $h(H) \subset D$.
2. Prouver que $h(H) = D$ et que h réalise une bijection de H dans D.