Programme de colles Quinzaine 6 (semaines du 8/11 et du 15/12)

Chapitre 7 : Suites

Chapitre 9 : Matrices
On commence par présenter les matrices ainsi que les opérations associées. Dans un second temps, on se sert des matrices pour donner une assise théorique à la méthode de résolution des systèmes linéaires avec le pivot de Gauss. Enfin, on travaille spécifiquement dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et on s'interesse à l'inversibilité des matrices.

<u>Des définitions et des notations à comprendre et à maîtriser</u> :
- Vocabulaire des matrices : ligne, colonne, diagonale, matrice carrée, triangulaire supérieure ou inférieure, symétrique, antisymétrique.
- Addition, produit par un scalaire dans $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Produit de deux matrices dont les tailles sont compatibles, attention : ce produit n'est (en général) ni commutatif, ni intègre.
- La base canonique de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est composée des matrices élémentaires $E_{i,j} = (\delta_{i,k}\delta_{j,l})_{(k,l)\in[\![1;n]\!]\times[\![1;p]\!]}$ avec $(i,j)) \in [\![1;n]\!] \times [\![1;p]\!]$. *Cette dernière expression illustre une des difficultés de ce chapitre : les notations. Veillez à bien comprendre le rôle de chaque lettre utilisée.*
- Opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes : dilatation, transvection et permutation. Elles correspondent à des produits à gauche (pour les opérations sur les lignes) ou à droite (sur les colonnes) par des matrices qui sont inversibles.
- Vocabulaire des systèmes linéaires : colonnes des inconnues, du second membre, système homogène, système compatible ou incompatible.
- Matrices inversibles, groupe linéaire.

<u>Des méthodes à connaître</u> :
- Calculer un produit matriciel.
- Résoudre un système linéaire en appliquant le pivot de Gauss.
- Utiliser la formule du binôme de Newton (attention à la condition de commutativité) pour calculer une puissance.
- Décider l'inversibilité d'une matrice 2×2 à l'aide du déterminant ; le cas échéant donner l'inverse.
- Algorithme pour décider si une matrice de taille 3×3 est inversible et, le cas échéant, calculer l'inverse.

<u>Démonstration à connaître</u> :
- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est stable par produit.
- Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. M est inversible si, et seulement si, $ad - bc \neq 0$. On a alors $M^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
- $[\star]$: Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. Si $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifie $AB = I_n$ alors $BA = I_n$.

TD sur la décomposition des fractions rationnelles en éléments simples
On a vu comment poser des **divisions euclidiennes** de polynômes ainsi que la méthode pour décomposer une fraction rationnelle $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ en éléments simples :
- on pose la division de $A(X)$ par $B(X)$: $A(X) = (BQ + R)(X)$;
- on a alors $\dfrac{A(X)}{B(X)} = Q(X) + \dfrac{R(X)}{B(X)}$;
- on trouve la factorisation de $B(X)$ en produit de **polynômes irréductibles**, attention : il y a peut-être une différence selon que l'on travaille sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{C}$;
- on a une formule qui donne $\dfrac{A(X)}{B(X)}$ comme une somme de fractions dont les dénominateurs font intervenir les polynômes irréductibles de la décomposition de $B(X)$. Il reste alors à obtenir un système pour trouver les valeurs des coefficients des numérateurs.

Deux types de colles sont proposés :

— Normal : une question de cours (une définition, une démonstration -hors [$\star$]) ; un des exercices proposé ci-après ; un exercice au choix du colleur.

— Etoile : une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [$\star$]) puis un ou des exercices au choix du colleur.

Les étudiants qui souhaitent une colle plus ambitieuse s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle).

Exercice n° 1

Soit la suite u définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{6u_n + 5}{u_n + 2}$.

1. Faire l'étude de $f(x) = \frac{6x+5}{x+2}$. En déduire que u est bien définie.
2. Etudier la monotonie de u.
3. Montrer que u converge et déterminer sa limite.

Exercice n° 2

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Vérifier que $A^3 = 0$.
2. Exprimer B en fonction de A.
3. Calculer, pour $n \in \mathbb{N}$, B^n.

Exercice n° 3

Trouver toutes les matrices qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice n° 4

1. Désomposer en éléments simples la fraction rationnelle $\dfrac{2}{X^3 + 3X^2 + 2X}$.
2. En déduire $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^3 + 3k^2 + 2k}$.

Exercice n° 5

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3 + 1}{x^3 + x} \mathrm{d}x$.