

Programme de colles Quinzaine 7

(semaines du 15/1 et du 22/1)

Chapitre 11 : Polynômes

Des définitions et des formules à connaître :

- vocabulaire et notations (degré, polynôme unitaire...)
- arithmétique : divisibilité, division euclidienne, polynôme irréductible, polynôme scindé.
- dérivation : polynôme dérivé, formules de Leibniz et de Taylor.
- lien entre coefficients et racines.

Théorème de Gauss et conséquences :

- Les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés.
- Nature des polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et de $\mathbb{R}[X]$.
- Tout polynôme se décompose en produit de polynômes irréductibles.

Fractions rationnelles : du vocabulaire et une méthode à connaître pour décomposer en éléments simples.

Démonstrations :

- Soit A et B deux polynômes. Si $A|B$ et $B|A$ alors A et B sont associés.
- Existence et unicité de la division euclidienne [★].
- Les polynômes de degré 1 sont irréductibles.
- Formule de Taylor [★].

Chapitre 12 : Dérivation des fonctions réelles de la variable réelle

Une notion connue et complétée par le cours de PCSI :

- nombre dérivé, dérivée à droite / à gauche, dérivées d'ordres supérieurs, fonctions de classe \mathcal{C}^k sur un intervalle.
- calcul de dérivées avec la définition ou par opérations.
- applications à l'approximation locale avec un DL1, à l'étude des variations et à la recherche des extrema.

Des nouveaux théorèmes

- Le théorème de la limite de la dérivée pour « gagner » la dérivabilité en un point.
- Le Théorème de Rolle donne l'existence de zéros de f' .
- Le Théorème des Accroissements Finis, les Inégalités des accroissements finis donnent des informations sur les variations de f selon le comportement de f' .

Démonstrations :

- Formule de dérivation d'un produit.
- Théorème de Rolle.
- TAF [★].

Ce programme est complété par une liste d'exercices (au verso) qui sera abondée pour la 2^e semaine.

3 formules de colle, au choix :

remédiation : une question de cours (pas une démonstration), puis un exercice de la liste qui a été préparé (on présente ses traces de recherche écrites, ça compte dans l'évaluation) puis un exercice au choix du colleur.

renforcement : une question de cours (éventuellement une démonstration mais sans [★]), puis un exercice de la liste qui a été préparé (sans ses notes) puis un exercice au choix du colleur. Le nouvel exercice proposé est à rédiger sur feuille et à me présenter au TD qui suivra la colle.

performance : une question de cours puis un ou deux exercices au choix du colleur. Un des exercices est à rédiger sur feuille et à me remettre comme DM supplémentaire.

Exercices de la 1ère semaine

Exercice n° 1

Soit $\Omega = \{P \in \mathbb{C}[X] / PP' = 18P\}$.

1. Montrer que Ω est non vide.
2. Déterminer Ω .

Exercice n° 2

Décomposer $X^9 + X^6 + X^3 + 1$ en produit de facteurs irréductibles sur \mathbb{R} .

Exercice n° 3

Pour quelles valeur du réel a le polynôme $P = (X + 1)^7 - X^7 - a$ admet-il une racine multiple réelle ?

Exercice n° 4

Décomposer en éléments simples (sur \mathbb{R}) la fraction rationnelle $\frac{x^3}{x^3 + 1}$.

Exercices supplémentaires pour la 2è semaine : 3 ou 4 exercices à venir sur la dérivation