

# Programme de colles Quinzaine 7

## (semaines du 15/1 et du 22/1)

---

### Chapitre 11 : Polynômes

Des définitions et des formules à connaître :

- vocabulaire et notations (degré, polynôme unitaire...)
- arithmétique : divisibilité, division euclidienne, polynôme irréductible, polynôme scindé.
- dérivation : polynôme dérivé, formules de Leibniz et de Taylor.
- lien entre coefficients et racines.

Théorème de Gauss et conséquences :

- Les polynômes de  $\mathbb{C}[X]$  sont scindés.
- Nature des polynômes irréductibles de  $\mathbb{C}[X]$  et de  $\mathbb{R}[X]$ .
- Tout polynôme se décompose en produit de polynômes irréductibles.

Fractions rationnelles : du vocabulaire et une méthode à connaître pour décomposer en éléments simples.

Démonstrations :

- Soit  $A$  et  $B$  deux polynômes. Si  $A|B$  et  $B|A$  alors  $A$  et  $B$  sont associés.
- Existence et unicité de la division euclidienne  $[\star]$ .
- Les polynômes de degré 1 sont irréductibles.
- Formule de Taylor  $[\star]$ .

### Chapitre 12 : Dérivation des fonctions réelles de la variable réelle

Une notion connue et complétée par le cours de PCSI :

- nombre dérivé, dérivée à droite / à gauche, dérivées d'ordres supérieurs, fonctions de classe  $\mathcal{C}^k$  sur un intervalle.
- calcul de dérivées avec la définition ou par opérations.
- applications à l'approximation locale avec un DL1, à l'étude des variations et à la recherche des extrema.

Des nouveaux théorèmes

- Le théorème de la limite de la dérivée pour « gagner » la dérivabilité en un point.
- Le Théorème de Rolle donne l'existence de zéros de  $f'$ .
- Le Théorème des Accroissements Finis, les Inégalités des accroissements finis donnent des informations sur les variations de  $f$  selon le comportement de  $f'$ .

Démonstrations :

- Formule de dérivation d'un produit.
- Théorème de Rolle.
- TAF  $[\star]$ .

---

Ce programme est complété par une liste d'exercices (au verso) qui sera abondée pour la 2<sup>e</sup> semaine.

3 formules de colle, au choix :

**remédiation** : une question de cours (pas une démonstration), puis un exercice de la liste qui a été préparé (on présente ses traces de recherche écrites, ça compte dans l'évaluation) puis un exercice au choix du colleur.

**renforcement** : une question de cours (éventuellement une démonstration mais sans  $[\star]$ ), puis un exercice de la liste qui a été préparé (sans ses notes) puis un exercice au choix du colleur. Le nouvel exercice proposé est à rédiger sur feuille et à me présenter au TD qui suivra la colle.

**performance** : une question de cours puis un ou deux exercices au choix du colleur. Un des exercices est à rédiger sur feuille et à me remettre comme DM supplémentaire.

## Exercices de la 1ère semaine

### Exercice n° 1

---

Soit  $\Omega = \{P \in \mathbb{C}[X] / PP' = 18P\}$ .

1. Montrer que  $\Omega$  est non vide.
2. Déterminer  $\Omega$ .

### Exercice n° 2

---

Décomposer  $X^9 + X^6 + X^3 + 1$  en produit de facteurs irréductibles sur  $\mathbb{R}$ .

### Exercice n° 3

---

Pour quelles valeur du réel  $a$  le polynôme  $P = (X + 1)^7 - X^7 - a$  admet-il une racine multiple réelle ?

### Exercice n° 4

---

Décomposer en éléments simples (sur  $\mathbb{R}$ ) la fraction rationnelle  $\frac{x^3}{x^3 + 1}$ .

## Exercices supplémentaires pour la 2è semaine :

### Exercice n° 5

---

Etudier la dérivabilité sur  $\mathbb{R}$  des fonctions :

$$f(x) = x|x| \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{1}{1 + |x|}$$

### Exercice n° 6

---

Déterminer  $(a; b; c) \in \mathbb{R}^3$  tel que la fonction  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & \text{si } x \in [0; 1] \\ ax^2 + bx + c & \text{si } x > 1 \end{cases}$  soit dérivable sur  $\mathbb{R}^{+*}$ .

### Exercice n° 7

---

Soit  $I = ]1; +\infty[$  et, pour  $x \in I$ ,  $f(x) = x \ln(x) - x$ .

1. Prouver que  $f$  réalise une bijection entre  $I$  et  $f(I)$  qu'on précisera.
2. Déterminer  $f^{-1}(0)$  et  $(f^{-1})'(0)$ .