Programme de colles Quinzaine 8 (semaines du 29/1 et du 5/2)

Chapitre 12 : Dérivation des fonctions réelles de la variable réelle

Une notion connue et complétée par le cours de PCSI :

— nombre dérivé, dérivée à droite / à gauche, dérivées d'ordres supérieurs, fonctions de classe $\mathscr{C}^k$ sur un intervalle.

— calcul de dérivées avec la définition ou par opérations.

— applications à l'approximation locale avec un DL1, à l'étude des variations et à la recherche des extrema.

Des nouveaux théorèmes

— Le théorème de la limite de la dérivée pour « gagner » la dérivabilité en un point.

— Le Théorème de Rolle donne l'existence de zéros de f'.

— Le Theorème des Accroissements Finis, les Inégalités des accroissements finis donnent des informations sur les variations de f selon le comportement de f'.

<u>Démonstrations :</u>

— Formule de dérivation d'un produit.

— Théorème de Rolle.

— TAF [$\star$].

Chapitre 13 : Espaces vectoriels

Beaucoup de définitions et d'exemples remarquables à connaître :

— 7 conditions pour qu'un ensemble soit un espace vectoriel. On montre que beaucoup d'ensembles usuels vérifient ces conditions, ils ont donc une structure d'espace vectoriel (suites, fonctions, matrices, polynômes...)

— La notion de sous-espace vectoriel souligne le rôle central des combinaisons linéaires ; elle permet de montrer plus facilement qu'un ensemble est un EV (un SEV étant un EV). Là encore, beaucoup d'exemples <u>et</u> des contre-exemples (toutes les parties d'un EV ne sont pas des SEV).

— Des exemples de SEV d'un espace E : les SEV engendrés (par combinaisons linéaires) par une famille finie de vecteurs. Si $\vec{u} \neq \vec{0}$ alors on dit que $\mathrm{Vect}(\vec{u})$ est une doite vectorielle ; si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires alors on dit que $\mathrm{Vect}(\vec{u};\vec{v})$ est un plan vectoriel.

— Etant donnés deux SEV F et G d'un EV E, la somme $F+G$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de la forme $\vec{u} = \vec{f} + \vec{g}$ avec $\vec{f} \in F$ et $\vec{g} \in G$; cet ensemble est aussi un SEV de E.
Si l'écriture $\vec{u} = \vec{f} + \vec{g}$ est unique (pour tous les $\vec{u}$) alors on dit que la somme est directe et on la note $F \oplus G$. Si, en plus, cette somme vaut E, on dit que F et G sont supplémentaires dans E.

— Etant donnée une famille finie de vecteur $\mathcal{F} = (\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_n)$ d'un espace E, on dit que :

- $\mathcal{F}$ est liée ou libre selon qu'il existe des combinaisons linéaires nulles non triviales de $\mathcal{F}$ ou pas. Cela conduit à dire si un système linéaire homogène admet une infinité de solutions ou uniquement la solution nulle.
- $\mathcal{F}$ est génératrice ou ne l'est pas selon que E soit généré par combinaisons linéaires à partir de $\mathcal{F}$ ou pas. Cela conduit à dire si un système $AX = B$ a des solutions quel que soit le second membre B.
- $\mathcal{F}$ est une base de E lorsqu'elle est libre et génératrice. On peut alors écrire tous les vecteurs de E de façon unique comme combinaisons linéaire des vecteurs de $\mathcal{F}$, les coefficients sont les coordonnées du vecteur dans $\mathcal{F}$, on peut représenter les vecteurs par des colonnes de coordonnées.
  Dans certains espaces de référence, il y a des bases canoniques à connaître.

<u>Quelques propriétés à connaitre et à savoir démontrer</u> :

— Deux SEV F et G sont en somme directe si, et seulement si, $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

— $\mathcal{F} = (\vec{u}_1; \ldots; \vec{u}_n)$ est une base de E si, et seulement si : $\forall \vec{v} \in E,\ \exists! (\lambda_i) \in \mathbb{K}^n \ / \ \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$.

Ce programme est complété par une liste d'exercices qui sera abondée pour la 2è semaine.

3 formules de colle, au choix :

remédiation : une question de cours (pas une démonstration), puis un exercice de la liste qui a été préparé (on présente ses traces de recherche écrites, ça compte dans l'évaluation) puis un exercice au choix du colleur.

renforcement : une question de cours (éventuellement une démonstration mais sans [$\star$]), puis un exercice de la liste qui a été préparé (sans ses notes) puis un exercice au choix du colleur. Le nouvel exercice proposé est à rédiger sur feuille et à me présenter au TD qui suivra la colle.

performance : une question de cours puis un ou deux exercices au choix du colleur. Un des exercices est à rédiger sur feuille et à me remettre comme DM supplémentaire.

Exercices de la 1ère semaine

Exercice n° 1

Calculer $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3+1}{x^3+x}\mathrm{d}x$.

Exercice n° 2

Soit $I =]1;+\infty[$ et, pour $x \in I$, $f(x) = x\ln(x) - x$.

1. Prouver que f réalise une bijection entre I et $f(I)$ qu'on précisera.
2. Déterminer $f^{-1}(0)$ et $(f^{-1})'(0)$.

Exercice n° 3

Soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x)f'(x) = 0$. Prouver que f est constante.

Exercice n° 4

Montrer que la famille (exp, Arctan, sin) est libre.

Exercices supplémentaires pour la 2è semaine :

Exercice n° 5

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. Montrer que f est bien définie, déterminer ses poins fixes.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$.
3. Pour $x \in [\frac{1}{2};1]$: montrer que $f(x) \geq \sqrt{\frac{3}{4}}$, en déduire que $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.
4. On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Déduire des questions précédentes que u est bien définie, qu'elle converge et précisez sa limite.

Exercice n° 6

On considère les ensembles :

$A = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \;/\; P(1) = P(2) = 0\}$; $\{P \in \mathbb{R}_2[X] \;/\; \forall x \in [1;2], P(x) \geq 0\}$; $\{P \in \mathbb{R}_2[X] \;/\; \forall x \in [1;2], P(x) \neq 0\}$

1. Prouver que A, B et C sont non-vides.
2. A, B et C sont-ils des SEV de $\mathbb{R}_2[X]$? Le cas échéant, en donner une base.