

Programme de colles Quinzaine 9

(semaines du 2/2 et du 9/2)

Chapitre 12 : Dérivation des fonctions réelles de la variable réelle

Une notion connue et complétée par le cours de PCSI :

- nombre dérivé, dérivée à droite / à gauche, dérivées d'ordres supérieurs, fonctions de classe \mathcal{C}^k sur un intervalle.
- calcul de dérivées avec la définition ou par opérations.
- applications à l'approximation locale avec un DL1, à l'étude des variations et à la recherche des extrema.

Des nouveaux théorèmes

- Le théorème de la limite de la dérivée pour « gagner » la dérivabilité en un point.
- Le Théorème de Rolle donne l'existence de zéros de f' .
- Le Théorème des Accroissements Finis, les Inégalités des accroissements finis donnent des informations sur les variations de f selon le comportement de f' .

Convexité : on revoit et on enrichit ce qui a été vu en Terminale. Bien connaître la définition, savoir qu'une fonction convexe n'est pas nécessairement dérivable. Lorsque la fonction f est dérivable deux fois sur I , la convexité est équivalente à la positivité de f'' sur I .

Démonstrations :

- Formules de dérivation d'un produit, de l'inverse et du quotient.
- Théorème de Rolle.
- TAF [★].

Chapitre 13 : Espaces vectoriels

Beaucoup de définitions et d'exemples remarquables à connaître.

- Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels : définitions, exemples, un SEV est lui-même un EV. SEV engendré par une famille de vecteurs.
- Etant donnés deux SEV F et G d'un EV E , la somme $F + G$ est l'ensemble des vecteurs \vec{u} de la forme $\vec{u} = \vec{f} + \vec{g}$ avec $\vec{f} \in F$ et $\vec{g} \in G$; cet ensemble est aussi un SEV de E .
Si l'écriture $\vec{u} = \vec{f} + \vec{g}$ est unique (pour tous les \vec{u}) alors on dit que la somme est directe et on la note $F \oplus G$. Si, en plus, cette somme vaut E , on dit que F et G sont supplémentaires dans E .
- Familles finies de vecteurs :
 - familles libres ou liées : on peut toujours se ramener à résoudre un système homogène.
 - familles génératrice ou non : cela conduit à dire si un système $AX = B$ a des solutions quel que soit le second membre B .
 - une base est une famille libre et génératrice. On peut alors écrire tous les vecteurs de E de façon unique comme combinaisons linéaires des vecteurs de la base, les coefficients sont les coordonnées du vecteur dans \mathcal{F} , on peut représenter les vecteurs par des colonnes de coordonnées.
Dans certains espaces de référence, il y a des bases canoniques à connaître.

Quelques propriétés à connaître et à savoir démontrer :

- Dans un EV, pour tout vecteur \vec{x} on a $0\vec{x} = \vec{0}$.
- Deux SEV F et G sont en somme directe si, et seulement si, $F \cap G = \{\vec{0}\}$.
- $\mathcal{F} = (\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_n)$ est une base de E si, et seulement si : $\forall \vec{v} \in E, \exists!(\lambda_i) \in \mathbb{K}^n / \vec{v} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{u}_i$.

Deux types de colles sont proposés :

- Normal : une question de cours (une définition, une démonstration -hors [★]); un des exercices proposé ci-après; un exercice au choix du colleur.
- Etoile : une question de cours (énoncé précis, démonstration - y compris [★]) puis un ou des exercices au choix du colleur.

Les étudiants qui souhaitent une colle plus ambitieuse s'inscrivent sur la feuille de calcul dédiée (lien sur le cahier de texte, merci de vous inscrire avant le dimanche soir qui précède votre colle).

Exercice n° 1

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. Montrer que f est bien définie, déterminer ses points fixes.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$.
3. Pour $x \in [\frac{1}{2}; 1]$: montrer que $f(x) \geq \sqrt{\frac{3}{4}}$, en déduire que $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.
4. On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
Déduire des questions précédentes que u est bien définie, qu'elle converge et précisez sa limite.

Exercice n° 2

Trouver une base et un supplémentaire dans \mathbb{R}^3 de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x + 2y = z\}$.

Exercice n° 3

- a) Prouver qu'une sous-famille d'une famille libre est libre.
- b) Prouver qu'une famille qui a une sous-famille liée est liée.

Exercice n° 4

L'ensemble des suites géométriques est-il un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Si oui, en donner une base.

Exercice n° 5

L'ensemble des suites arithmétiques est-il un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$? Si oui, en donner une base.