Programme de colles Quinzaine 9 (semaines du 12/2 et du 19/2)

Chapitre 13 : Espaces vectoriels

Beaucoup de définitions et d'exemples remarquables à connaître.

— Espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels : définitions, exemples, un SEV est lui-même un EV. SEV engendré par une famille de vecteurs.

— Etant donnés deux SEV F et G d'un EV E, la somme $F+G$ est l'ensemble des vecteurs $\vec{u}$ de la forme $\vec{u} = \vec{f} + \vec{g}$ avec $\vec{f} \in F$ et $\vec{g} \in G$; cet ensemble est aussi un SEV de E.
Si l'écriture $\vec{u} = \vec{f} + \vec{g}$ est unique (pour tous les $\vec{u}$) alors on dit que la somme est directe et on la note $F \oplus G$. Si, en plus, cette somme vaut E, on dit que F et G sont supplémentaires dans E.

— Familles finies de vecteurs :
- familles libres ou liées : on peut toujours se ramener à résoudre un système homogène.
- familles génératrice ou non : cela conduit à dire si un système $AX = B$ a des solutions quel que soit le second membre B.
- une base est un famille libre et génératrice. On peut alors écrire tous les vecteurs de E de façon unique comme combinaisons linéaire des vecteurs de la base, les coefficients sont les coordonnées du vecteur dans $\mathcal{F}$, on peut représenter les vecteurs par des colonnes de coordonnées.
Dans certains espaces de référence, il y a des bases canoniques à connaître.

Quelques propriétés à connaitre et à savoir démontrer :

— Deux SEV F et G sont en somme directe si, et seulement si, $F \cap G = \{\vec{0}\}$.

— $\mathcal{F} = (\vec{u}_1; \dots; \vec{u}_n)$ est une base de E si, et seulement si : $\forall \vec{v} \in E,\ \exists!(\lambda_i) \in \mathbb{K}^n \ / \ \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{u}_i$.

Chapitre 14 : Analyse asymptotique

Comparaison asymptotique de suites ou de fonctions

— Différence fondamentale entre les suites et les fonctions : pour les fonctions il faut impérativement préciser où on travaille.

— Domination : le quotient est borné (localement pour les fonctions). Négligeabilité : la limite du quotient est 0. Equivalence : la limite du quotient est 1.

— Lien entre les relations : un o est un O, un $\sim$ est un O...

— On peut travailler avec les équivalents pour étudier localement un signe, pour obtenir une limite. Les équivalents sont compatibles avec les produits, les quotients, les puissances, les substitutions mais pas avec les additions ni les compositions.

— Equivalents usuels : polynômes (en 0 et en $\pm\infty$), sin et cos (en 0), $\ln(1+x)$ et $e^x - 1$.

Un nouvel outil : le développement limité

— Une définition à bien connaître.

— La formule de Taylor Young assure l'existence des DL pour les fonctions régulières ; elle fournit les premiers DL de référence.

— On peut calculer des DL par opérations : combinaisons linéaires, produits, composition et quotient avec le DL de $\frac{1}{1-u}$, en dérivant ou en primitivant.

— Les DL fournissent des équivalents, ils permettent de lever des formes indéterminées, d'étudier des positions relatives (localement), de trouver des asymptotes.

Démonstrations :

— $\ln(n) = o(n)$

— $\forall a \in \mathbb{R},\ a^n = o(n!)$ [$\star$].

— Unicité du DL [$\star$].

Ce programme est complété par une liste d'exercices qui sera abondée pour la 2è semaine.

3 formules de colle, au choix :

remédiation : une question de cours (pas une démonstration), puis un exercice de la liste qui a été préparé (on présente ses traces de recherche écrites, ça compte dans l'évaluation) puis un exercice au choix du colleur.

renforcement : une question de cours (éventuellement une démonstration mais sans [$\star$]), puis un exercice de la liste qui a été préparé (sans ses notes) puis un exercice au choix du colleur. Le nouvel exercice proposé est à rédiger sur feuille et à me présenter au TD qui suivra la colle.

performance : une question de cours puis un ou deux exercices au choix du colleur. Un des exercices est à rédiger sur feuille et à me remettre comme DM supplémentaire.

Exercices de la 1ère semaine

Exercice n° 1

Je laisse cet exercice (sur les accroissements finis) déjà présent en semaine 2 de la quinzaine précédente pour être certain que tous les étudiants l'aient traité.

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$.

1. Montrer que f est bien définie, déterminer ses poins fixes.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de $f(x)$.
3. Pour $x \in [\frac{1}{2}; 1]$: montrer que $f(x) \geq \sqrt{\frac{3}{4}}$, en déduire que $|f'(x)| \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$.
4. On pose $u_0 = \frac{1}{2}$ et, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   Déduire des questions précédentes que u est bien définie, qu'elle converge et précisez sa limite.

Exercice n° 2

Calculer le DL de tan à l'ordre 5 en 0.

Exercice n° 3

Trouver une base et un supplémentaire dans $\mathbb{R}^3$ de $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x + 2y = z\}$.

Exercice n° 4

Soit $f(x) = \dfrac{2x}{\ln(\frac{1+x}{1-x})}$.
Après avoir déterminé son domaine de définition, étudiez si on peut prolonger f par continuité.

Exercices supplémentaires pour la 2è semaine :