

Programme de colles 13 (4/1 - 8/1)

Cours

Pour chaque définition, il est important de bien comprendre le rôle des quantificateurs utilisés.

L'étudiant doit être en mesure de proposer des exemples (éventuellement à l'aide de figures) pour illustrer les définitions. La démonstration marquée de [★] ne sera demandée qu'aux élèves à l'aise.

- Systèmes linéaires : algorithme du pivot de Gauss pour échelonner une matrice, algorithme de réduction d'une matrice échelonnée.
Critère de compatibilité d'un système : si le système S a pour matrice augmentée $(A|B)$ et que $(A'|B')$ est la matrice augmentée obtenue en échelonnant A et A' , le système S est compatible si, et seulement si, les éventuelles lignes de zéros de A' correspondent à des coefficients nuls de B' .
Le rang d'un système / d'une matrice est le nombre de pivots de la matrice échelonnée équivalente. Un système $n \times p$ compatible de rang r a une unique solution si $r = p$, il en a une infinité si $r < p$. Résolution d'un système compatible : on exprime les inconnues principales en fonction des éventuels paramètres.
Elements d'algèbre de \mathbb{R}^n : combinaisons linéaires, Vect, familles libres ou liées, génératrices ou non. Pour décider la liberté d'une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n , on compare son rang (c'est-à-dire celui de la matrice dont les colonnes sont les vecteurs de la famille) au nombre de vecteurs.
- Dérivation des fonctions : nombre dérivé, équation réduite de la tangente en a lorsque f est dérivable en a , dérivée à gauche et à droite, fonctions de classe \mathcal{C}^n et de classe \mathcal{C}^∞ , recollement \mathcal{C}^1 .
Applications de la dérivation : développement limité à l'ordre 1, étude des variations, recherche des extrema ; Théorèmes de Rolle, des Accroissements Finis, Inégalités des Accroissements Finis. (Il faut être en mesure de faire une figure pour illustrer ces trois derniers résultats).
- Démonstrations exigibles :
 - Si f et g sont dérivables en a avec $g(a) \neq 0$ alors $\frac{f}{g}$ l'est aussi et on a $\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'g - fg'}{g^2}(a)$.
 - Théorème de Rolle.

Exercices

- a) Etudier la régularité d'une fonction définie par morceaux : continuité, dérivabilité.
- b) Calculer une limite.
- c) Décomposition des fractions rationnelles en éléments simples (l'intégration des éléments simples n'a pas encore été vue, elle peut être proposée mais de façon guidée).
- d) Systèmes linéaires.
- e) Décider si une famille de vecteurs de \mathbb{R}^n est libre ou liée ; génératrice ou non.