Programme de colles 16 (25/1 - 29/1)

Cours

Pour chaque définition, il est important de bien comprendre le rôle des quantificateurs utilisés. L'étudiant doit être en mesure de proposer des exemples (éventuellement à l'aide de figures) pour illustrer les définitions. La démonstration marquée de $[\star]$ *ne sera demandée qu'aux élèves à l'aise.*

— Matrices : vocabulaire et notations, dont le symbole de Kronecker. Produit matriciel, non commutativité et non intégrité.
Matrices inversibles, $\mathcal{G}l_n(\mathbb{K})$. Le déterminant d'un matrice carrée de taille 2 permet de décider son inversibilité ; expression de l'inverse lorsqu'elle existe. Pour le cas général, le calcul du rang permet de décider l'inversibilité d'une matrice ; autrement dit : $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si, et seulement si, A est équivalente en lignes à I_n. Algorithme d'inversion on échelonne et on réduit $(A|B)$ avec $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ ou bien $(A|I_n)$; si A est inversible, la partie augmentée donne A^{-1}.

— Analyse asymptotique : relations de domination, de négligeabilité et d'équivalence pour les suites ; notations de Landau. Comparaisons usuelles :

i $\forall(\alpha,\beta) \in (\mathbb{R}^{+*})^2,\ \ln^\beta n = o(n^\alpha)$

ii $\forall \alpha \in \mathbb{R}^{+*}, \forall a > 1,\ n^\alpha = o(a^n)$

iii $\forall a \in \mathbb{R},\ a^n = o(n!)$.

— Démonstrations exigibles :
- L'ensemble des matrices triangulaires supérieures de taille n est stable par produit.
- $[\star]$ Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si A est inversible à droite alors A est inversible.
- $\ln n \underset{n\to+\infty}{=} o(n)$
- $[\star]$ Pour tout réel a, $a^n \underset{n\to+\infty}{=} o(n!)$

Exercices

a) Etudier la rédularité d'une fonction définie par morceaux : continuité, dérivabilité.

b) Calculer une limite.

c) Utiliser les résultats du chapitre sur la dérivation, en particulier : le Théorème de Rolle, le Théorème des Accroissements Finis ou l'Inégalités des Accroissements Finis.

d) Exercices de dénombrement.

e) Matrices : calculer dans $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, décider l'inversibilité, calculer l'inverse. En particulier, les élèves doivent être à l'aise dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$.