Programme de colles 20 (8/3 - 12/3)

Cours

Pour chaque définition, il est important de bien comprendre le rôle des quantificateurs utilisés. L'étudiant doit être en mesure de proposer des exemples (éventuellement à l'aide de figures) pour illustrer les définitions. Les démonstrations marquées de [$\star$] ne seront demandées qu'aux élèves à l'aise.

— Polynômes : vocabulaire et notations, $\mathbb{K}_n[X]$ est stable par combinaisons linéaires. Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$: divisibilité, division euclidienne, polynômes irréductibles. Polynôme dérivé, formules de Leibniz, de Taylor. Racines d'un polynôme, ordre de multiplicité, lien avec le polynôme dérivé. Polynôme scindé, Théorème de D'Alembert-Gauss, polynômes irréductibles, relations coefficients-racines.

— Espaces vectoriels : définition, exemples de référence, sous-espaces vectoriels, sous-espace vectoriel engendré par une famille de vecteurs. Familles libres ou liées, génératrices ou non. Somme de sous-espaces, sommes directes, sous-espaces supplémentaires. Bases, bases canoniques des espaces de référence. Matrice colonne des coordonnées d'un vecteur exprimé dans une base.
Pour le moment et pour marquer la différence entre scalaires et vecteurs, on peut noter les vecteurs avec une flèche.

— Démonstrations exigibles :
- Les polynômes de degré 1 sont irréductibles.
- α est racine du polynôme P si, et seulement si, $(X-\alpha) \mid P$.
- Soit E un espace vectoriel. E admet des sous-espaces vectoriels et ils contiennent tous $\vec{0}$.
- La famille (finie) de vecteurs $\mathcal{B}$ est une base de E si, et seulement si, tout vecteur de E s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}$.

Exercices

a) Obtenir un DL par opérations en se ramenant aux DL de référence ou à l'aide de Taylor Young.

b) Se servir d'un DL pour étudier une limite, justifier la régularité, étudier un comportement local (tangente ou asymptote et positions relatives).

c) Calculer dans $\mathbb{K}[X]$: produit, composée, division euclidienne, dérivation.

d) Décomposer une fraction rationnelle en éléments simples et intégrer l'intégrer (éléments simples de premère espèce et de deuxième espèce mais le dénominateur à la puissance 1).

e) Montrer qu'une partie d'un EV de référence en est un SEV.

f) Dans des cas simples, trouver le supplémentaires d'un SEV *(les intuitions liées aux dimensions sont encouragées).*

g)