Programme de colles 26 (3/5 - 7/5)

Cours

Pour chaque définition, il est important de bien comprendre le rôle des quantificateurs utilisés. L'étudiant doit être en mesure de proposer des exemples (éventuellement à l'aide de figures) pour illustrer les définitions. Les démonstrations marquées de [$\star$] ne seront demandées qu'aux élèves à l'aise.

— Espaces vectoriels : bases canoniques des EV de référence. Dans un espace de dimension n, les familles génératrices ont au moins n vecteurs, les familles finies en ont au plus n. De plus, une famille libre ou génératrice de n vecteurs est une base. Les sous-espaces d'un EV de dimension finie n sont également des EV de dimensions finies, leurs dimensions sont inférieures ou égales à n. Cas d'égalité : le sous-espace est l'EV entier.
Formule de Grassmann. Dans un EV de dimension finie, existence (et pas unicité) des supplémentaires, dimension d'un supplémentaire.

— Applications linéaires : une application linéaire entre deux EV est une application qui respecte les combinaisons linéaires. Exemples. Les images directes et les images réciproques de SEV par une application linéaire sont des SEV (bien réfléchir de quel EV).Image et noyau d'une application linéaire.
Endomorphismes remarquables d'un EV : homothéties, projections et symétries. Un endomorphisme u est une projection si, et seulement si, elle vérifie $u \circ u = u$; ses éléments caractéristiques sont alors $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$. De façon analogue, on caractérise les symétries (parmi les endomorphismes) par $u \circ u = \mathrm{Id}$.
Une application linéaire $E \to F$ est complètement définie par l'image d'une base de E.
Deux espaces de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si, ils ont même dimension.
Rang d'une application linéaire, théorème du rang.
Equations linéaires, structure de l'ensemble des solutions.

— Démonstrations exigibles :
- Une application linéaire $u : E \to F$ est injective si, et seulement si, son noyau est $\{\vec{0}_E\}$.
- [$\star$] Théorème du rang.
- Structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire.

Exercices

Sur les espaces vectoriels, on utilisera la dimension lorsque c'est possible.

a) Probabilités : modéliser une expérience aléatoire, justifier lorsqu'il y a équiprobabilité, introduire correctement des notations. Probabilités conditionnelles.

b) Trouver le supplémentaires d'un SEV.

c) Décider si une application est linéaire ou non.

d) Déterminer le noyau, l'image d'une application linéaire.

e) Décider si un endomorphisme est une projection, une symétrie. Le cas échéant, trouver ses éléments caractéristiques.