Programme de colles 27 (17/5 - 21/5)

Cours

Pour chaque définition, il est important de bien comprendre le rôle des quantificateurs utilisés. L'étudiant doit être en mesure de proposer des exemples (éventuellement à l'aide de figures) pour illustrer les définitions. Les démonstrations marquées de [$\star$] ne seront demandées qu'aux élèves à l'aise.

— Applications linéaires : une application linéaire entre deux EV est une application qui respecte les combinaisons linéaires. Exemples. Les images directes et les images réciproques de SEV par une application linéaire sont des SEV (bien réfléchir de quel EV).Image et noyau d'une application linéaire.
Endomorphismes remarquables d'un EV : homothéties, projections et symétries. Un endomorphisme u est une projection si, et seulement si, elle vérifie $u \circ u = u$; ses éléments caractéristiques sont alors $\ker u$ et $\operatorname{Im} u$. De façon analogue, on caractérise les symétries (parmi les endomorphismes) par $u \circ u = \mathrm{Id}$.
Une application linéaire $E \to F$ est complètement définie par l'image d'une base de E.
Deux espaces de dimension finie sont isomorphes si, et seulement si, ils ont même dimension.
Rang d'une application linéaire, théorème du rang.
Equations linéaires, structure de l'ensemble des solutions.

— Séries : définitions et notations. Exemples de référence : séries géométriques, série harmonique, série harmonique alternée, $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ (qui illustre les séries téléscopiques), séries de Riemann.
Propriétés générales : l'ensemble des séries convergentes est un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; divergence grossière : $\sum u_n$ ne peut pas converger si (u_n) ne converge pas vers 0.
Séries à termes positifs : la suite des sommes partielles est une suite croissante, elle a donc une limite (finie ou non). Intérêt des SATP : On peut utiliser les O ou les équivalents. Si f est positive et monotone, $\sum f(n)$ a la même nature que $\lim_n \int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.
Convergence absolue : définition, la convergence absolue entraine la convergence.

— Démonstrations exigibles :
- [$\star$] Théorème du rang.
- $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la site des sommes partielles est équivalente à $(\ln n)_n$.
- On ne change pas la nature de $\sum u_n$ en modifiant un nombre fini de termes de $(u_n)_n$.

Exercices

Sur les espaces vectoriels, on utilisera la dimension lorsque c'est possible.

a) Probabilités conditionnelles.

b) Décider si une application est linéaire ou non.

c) Déterminer le noyau, l'image d'une application linéaire. Décider qu'un ensemble est un SEV en l'envisageant comme un noyau ou une image.

d) Décider si un endomorphisme est une projection, une symétrie (ou autre chose). Le cas échéant, trouver ses éléments caractéristiques.

e) Utiliser le théorème du rang.

f) Etudier la nature d'une série.