Programme de colles 29 (31/5 - 4/6)

Cours

Pour chaque définition, il est important de bien comprendre le rôle des quantificateurs utilisés. L'étudiant doit être en mesure de proposer des exemples (éventuellement à l'aide de figures) pour illustrer les définitions. Les démonstrations marquées de [$\star$] ne seront demandées qu'aux élèves à l'aise.

— Séries : définitions et notations. Exemples de référence : séries géométriques, série harmonique, série harmonique alternée, $\sum \frac{1}{n(n+1)}$ (qui illustre les séries téléscopiques), séries de Riemann.
Propriétés générales : l'ensemble des séries convergentes est un SEV de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$; divergence grossière : $\sum u_n$ ne peut pas converger si (u_n) ne converge pas vers 0.
Séries à termes positifs : la suite des sommes partielles est une suite croissante, elle a donc une limite (finie ou non). Intérêt des SATP : On peut utiliser les O ou les équivalents. Si f est positive et monotone, $\sum f(n)$ a la même nature que $\lim_n \int_0^n f(x)\, \mathrm{d}x$.
Convergence absolue : définition, la convergence absolue entraine la convergence.

— Matrices et applications linéaires : application linéaire canoniquement assiciée à une matrice.
Etant donnés E et F deux EV de dimensions finies, $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_p)$ des bases de E et F respectivement et $u \in \mathcal{L}(E, F)$:
$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$ est la matrice $p \times n$ dont les colonnes sont $u(\vec{e}_1), \ldots, u(\vec{e}_n)$ exprimés dans $\mathcal{B}_F$.
Le rôle des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est crucial. Par exemple, l'application Id_E a plusieurs matrices (dont I_n) qui la représentent.
Application : pour calculer les images à l'aide de la matrice, on travaille avec les vecteurs colonnes et on fait un produit à gauche par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E, \mathcal{B}_F}(u)$.
$\mathcal{L}(E, F)$ est un EV isomorphe à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on en déduit $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np$.
Composition d'appliction matricielle et représentation matricielle : on fait le produit des matrices.
Changement de bases, matrices de passages.
On définit le rang, le noyau et l'image d'une matrice comme le rang, l'image et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice.

— Démonstrations exigibles :
- $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la site des sommes partielles est équivalente à $(\ln n)_n$.
- On ne change pas la nature de $\sum u_n$ en modifiant un nombre fini de termes de $(u_n)_n$.
- la série harmonique alternée converge, sa somme vaut $-\ln 2$ (Vu en TD).

Exercices

a) Décider si un endomorphisme est une projection, une symétrie (ou autre chose). Le cas échéant, trouver ses éléments caractéristiques.

b) Utiliser le théorème du rang.

c) Etudier la nature d'une série.

d) Déterminer la matrice associée à une application linéaire, étant donné un couple de bases.