Programme de colles 30 (7/6 - 11/6)

Cours

Pour chaque définition, il est important de bien comprendre le rôle des quantificateurs utilisés. L'étudiant doit être en mesure de proposer des exemples (éventuellement à l'aide de figures) pour illustrer les définitions. Les démonstrations marquées de [$\star$] ne seront demandées qu'aux élèves à l'aise.

— Matrices et applications linéaires : application linéaire canoniquement assiciée à une matrice.
  Etant donnés E et F deux EV de dimensions finies, $\mathcal{B}_E = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ et $\mathcal{B}_F = (\vec{f}_1, \ldots, \vec{f}_p)$ des bases de E et F respectivement et $u \in \mathcal{L}(E, F)$:
  $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$ est la matrice $p \times n$ dont les colonnes sont $u(\vec{e}_1), \ldots, u(\vec{e}_n)$ exprimés dans $\mathcal{B}_F$.
  Le rôle des bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ est crucial. Par exemple, l'application Id_E a plusieurs matrices (dont I_n) qui la représentent.
  Application : pour calculer les images à l'aide de la matrice, on travaille avec les vecteurs colonnes et on fait un produit à gauche par $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E,\mathcal{B}_F}(u)$.
  $\mathcal{L}(E, F)$ est un EV isomorphe à $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, on en déduit $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = np$.
  Composition d'appliction matricielle et représentation matricielle : on fait le produit des matrices.
  Changement de bases, matrices de passages.
  On définit le rang, le noyau et l'image d'une matrice comme le rang, l'image et le noyau de l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice.

— Variables aléatoires : définitions (VA, espérance, variance), la formule de Kœnig-Huyguens permet de calculer la variance plus simplement que la définition.
  Loi de Bernoulli. Loi binomiale : définition, elle modélise le nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes de paramètre $p \in [0; 1]$.

— Démonstrations exigibles :
  - $\sum \frac{1}{n}$ diverge, la site des sommes partielles est équivalente à $(\ln n)_n$.
  - On ne change pas la nature de $\sum u_n$ en modifiant un nombre fini de termes de $(u_n)_n$.
  - la série harmonique alternée converge, sa somme vaut $-\ln 2$ (Vu en TD).

Exercices

a) Etudier la nature d'une série.

b) Déterminer la matrice associée à une application linéaire, étant donné un couple de bases.

c) Changer de bases.

d) Utiliser le théorème du rang.

e) Etudier une variable aléatoire : loi, espérance, variance.

f) Reconnaître les expériences aléatoires dans lesquelles on peut utiliser une modélisation avec la loi binomiale.

g) Etant donnée la loi d'un couple de variables aléatoires (X, Y) formulée avec un tableau, donner les lois marginales de X et Y, décider si X et Y sont indépendantes ou non.