PSI **Septembre 2022**
MATHEMATIQUES

Feuille d'Exercices
Compléments d'algèbre linéaire

Exercice 1. Soit E et F deux $\mathbb{K}$ espaces vectoriels de dimension finie.

1. Montrer que $\varphi : (x, y) \in E \times F \to x + y$ est linéaire.
2. Déterminer ses noyau et image.
3. Retrouver la formule de Grassmann.

Exercice 2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$ et $B = \begin{pmatrix} A & A^2 \\ 0_n & A \end{pmatrix}$ et $P(X) = \sum\limits_{i=0}^{p} a_i X^i \in \mathbb{K}_p[X]$. Soit $P(B) = \sum\limits_{i=0}^{p} a_i B^i$.
Montrer que $P(B) = \begin{pmatrix} P(A) & A^2 P'(A) \\ 0_n & P(A) \end{pmatrix}$.

Exercice 3. Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / M J_r = 0\}$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
   Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie et donner sa dimension.
2. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang r. On pose $\Delta_A = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), AMA = 0_n\}$.
   Montrer que Δ_A est un sev de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ de dimension finie dont on donnera la dimension et une base.

Exercice 4. (Extraît CCINP 2021) Soit $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$. Montrer que A est semblable à une matrice de diagonale nulle.

Exercice 5. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tel que $A^2 = A$. Montrer que A est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 6. (partie de CCINP PSI 2021)

1. Soient $(r, s, t, u) \in \mathbb{C}^4$ et (e_1, e_2) la base canonique de $\mathbb{C}^2$. On note φ l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice dans la base $(e_1; e_2)$ est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de φ dans la base (e_2, e_1).
2. Soit $(R, S, T, U) \in (\mathscr{M}_n(\mathbb{C}))^4$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Montrer de même que $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathscr{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$

Exercice 7. Soit E un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie et u un endomorphisme de E vérifiant

$$u^3 + u = 0$$

1. Montrer que $\operatorname{Im} u$ est stable par u
2. Pour $x \in \operatorname{Im} u$, calculer $u^2(x)$
3. Soit v l'endomorphisme induit par u sur $\operatorname{Im} u$. Montrer que v est un isomorphisme. Que vaut v^{-1} ?
4. En déduire que le rang de u est un entier pair.

Exercice 8. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ où E un $\mathbb{R}$ ev de dimension finie. On suppose que $f^3+f^2+f=0_{\mathscr{L}(E)}$

1. Montrer que $\operatorname{Ker} f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$.
2. Justifier que $F = \operatorname{Im}(f)$ est stable par f.
3. Montrer que l'endomorphisme g de F induit par f est un automorphisme de F.

Exercice 9. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.
Montrer que si $rg(A) = 1$, alors $A^2 = Tr(A)A$.

Exercice 10.
1. Soit $(E_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ la base des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
   Calculer $E_{ij}E_{kl}$ pour $(i,j,k,l) \in [1,n]^4$.
2. Soit $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \mathbb{K}$ linéaire vérifiant : $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2, \varphi(AB) = \varphi(BA)$.
   Montrer que φ est colinéaire à la trace.

Exercice 11. (CCP)
Calculer, pour $(a,b,c) \in \mathbb{K}^3$, $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$.

Exercice 12. Soient P un polynôme de degré n et $(a_0, \cdots, a_n)$ des scalaires deux à deux distincts. Montrer que $(P(X+a_i))_{0\leq i\leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Exercice 13.
1. Montrer que $H = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) / tr(M) = 0\}$ est un hyperplan et en déterminer une équation et un supplémentaire G.
2. Calculer la trace du projecteur sur F parallèlement à G.
3. Soit φ l'endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ défini pour tout $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ par :
$$\varphi(M) = \operatorname{tr}(M)I_n + M$$
   Déterminer la trace et le déterminant de φ .
4. Déterminer la trace et le déterminant de $T : M \mapsto {}^tM$.

Exercice 14.
1. Montrer que $F = \{f \in \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R}) / f(0) = f(1) = 0\}$ est un $\mathbb{R}$ ev en montrant qu'il est l'intersection de deux hyperplans.
2. Trouver un supplémentaire de F dans $\mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$.

Exercice 15. Soit (a_0, a_1, a_2) trois scalaires distincts et (y_0, y_1, y_2) trois réels. Trouver tous les polynômes P tels que $P(a_0) = y_0, P(a_1) = y_1, P(a_2) = y_2$.

Exercice 16. D'après écrit e3A. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $x_0, \cdots, x_n$ des réels deux à deux distincts. Soit $(L_k)_{0\leq k\leq n}$ la famille des polynômes de Lagrange associés.

Soit $Q \in \mathbb{R}[X]$. On pose $Q = Q_1 - \sum\limits_{k=0}^{n} Q(x_k)L_k$.

1. Montrer que Q_1 admet au moins $n+1$ racines réelles.
2. On pose $s_{n+1} = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k^{n+1}L_k(0)$ et $s_{n+2} = \sum\limits_{k=0}^{n} x_k^{n+2}L_k(0)$.
   (a) Déduire de 1. que $s_{n+1} = (-1)^n \prod\limits_{k=0}^{n} x_k$.
   (b) Exprimer s_{n+2} en fonction de n, somme et produit des x_k.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère n réels $(a_1, \cdots, a_n)$ deux à deux distincts rangés dans l'ordre croissant.
On pose $E = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On note $E^\star$ l'espace vectoriel des formes linéaires sur E.

1. Donner le dimension de $E^\star$.
2. Pour $i \in [1, n]$, on pose : $\varphi_i : E \mapsto \mathbb{R}, P \longmapsto P(a_i)$.
   Montrer que $(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ est une base de $E^\star$.
3. En déduire qu'il existe une unique suite $(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ telle que

$$\forall P \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_0^1 P(t)dt = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i P(a_i)$$

Exercice 18. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que
$$\begin{array}{rccc} \theta : & E & \longrightarrow & \mathcal{L}(E, \mathbb{C}) \\ & A & \longmapsto & (M \longmapsto Tr(AM)) \end{array}$$
   est un isomorphisme.
2. Déduire de 1 que, dans tout hyperplan de E, il existe une matrice inversible.

Exercice 19. (extrait écrit Centrale) Soit $n \in \mathbb{N}^*, (A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Justifier que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit : $M = M_1 + iM_2$ avec $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
2. Justifier l'existence de deux matrices U et V à coefficients réels telles que $U + iV \in GL_n(\mathbb{C})$ et $(U + iV)A = B(U + iV)$.
3. Montrer que l'application $\lambda \longmapsto det(U + \lambda V)$ est un polynôme non nul sur $\mathbb{C}$.
4. En déduire l'existence de $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $U + \lambda_0 V \in GL_n(\mathbb{R})$.
5. Montrer que A et B sont semblables sur $\mathbb{R}$.

Exercice 20. (Mines-Pont 2018) Soit E un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie n, f un endomorphisme de E, G un supplémentaire de $\operatorname{Im} f$ dans E. On pose $H = \{g \in \mathscr{L}(E) / f \circ g \circ f = 0\}$.

1. Montrer que H est un $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension finie.
2. Montrer que $\Psi : g \in H \mapsto (g/\operatorname{Im} f, g/G) \in \mathscr{L}(\operatorname{Im} f, \operatorname{Ker} f) \times \mathscr{L}(G, E)$ est un isomorphisme.
3. Donner la dimension de H.