

Feuille d'Exercices
Compléments d'algèbre linéaire

1 Les applications assez directes du cours

Exercice 1. Justifier que $H = \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) / \text{tr}(M) = 0\}$ est un sev, dont on donnera la dimension, une base et un supplémentaire.

Exercice 2. Soit $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ non nulle telle qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $A^k = 0$

1. Montrer qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $A^p = 0$ et $A^{p-1} \neq 0$.
2. montrer que $p \leq 4$.

3. On suppose $p = 4$. , montrer que A est semblable à
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 3. (partie d'écrit CCINP PSI 2021) On considère une matrice C de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. \overline{C} désigne la matrice dont les coefficients sont les conjugués des coeffs de C . En considérant le produit matriciel $\begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -\overline{C} & I_n \end{pmatrix}$, montrer que :

$$\det(I_n + C\overline{C}) = \det \begin{pmatrix} I_n & -C \\ \overline{C} & I_n \end{pmatrix}$$

Exercice 4. (partie d'écrit CCINP PSI 2021)

1. Soient $(r, s, t, u) \in \mathbb{C}^4$ et (e_1, e_2) la base canonique de \mathbb{C}^2 . On note φ l'endomorphisme de \mathbb{C}^2 dont la matrice dans la base $(e_1; e_2)$ est $\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix}$. Exprimer la matrice de φ dans la base (e_2, e_1) .
2. Soit $(R, S, T, U) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{C}))^4$. En s'inspirant de la question précédente, montrer que la matrice $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} U & T \\ S & R \end{pmatrix}$. Montrer de même que $\begin{pmatrix} R & S \\ T & U \end{pmatrix}$ est semblable dans $\mathcal{M}_{2n}(\mathbb{C})$ à $\begin{pmatrix} R & -S \\ -T & U \end{pmatrix}$

Exercice 5. Prouver qu'il existe un seul endomorphisme u de $\mathbb{R}_2[X]$ tel que $\text{Ker } u$ est engendré par $X^2 - 1$ et $X^2 + 1$ et tel que $u(X) = 2X$. Quelle est sa matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$? Quels sous-espaces stables apparaissent dans cette écriture matricielle?

Exercice 6. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E un \mathbb{R} ev de dimension finie. On suppose que $f^3 + f^2 + f = 0_{\mathcal{L}(E)}$

1. Montrer que $\text{Ker } f \cap \text{Im } f = \{0\}$.
2. Justifier que $F = \text{Im}(f)$ est stable par f .
3. Montrer que l'endomorphisme g de F induit par f est un automorphisme de F .

Exercice 7. Parmi les matrices suivantes, donner celles qui sont semblables :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 8. Montrer que, f , défini sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f(P)(x) = \int_x^{x+1} P(t) dt$ est un endomorphisme et donner sa trace.

Exercice 9. Déterminant et trace de l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \varphi : M \mapsto \text{tr}(M)I_n + M$

Exercice 10. Pour $n \geq 2$, et $(E) : M + {}^t M = 2(\text{tr}M)I_n$, avec $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'ensemble des solutions de E (muni des opérations usuelles) est un sous-espace de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et déterminer sa dimension.

Exercice 11. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Montrer que si $\text{rg}(A) = 1$, alors $A^2 = \text{Tr}(A)A$.

Exercice 12. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Soit $(E_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ la base des matrices élémentaires de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.
Calculer AE_{ij} et $E_{i,j}A$ pour $(i, j) \in [1, n]^2$.
2. Dans cette question $n = 2$. Calculer la trace de l'endomorphisme f donné par : $f(M) = AM + MA$
3. de même pour n quelconque

Exercice 13. Pour $n > 0$, on note D_n l'ensemble des matrices diagonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que D_n est un sous espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser une base et sa dimension.
2. Soit $A \in D_n$ telle que $i \neq j \implies a_{ii} \neq a_{jj}$. Prouver que $(I_n, A, A^2, \dots, A^{n-1})$ est une base de D_n .
3. Prouver que si $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ commute avec A , alors $B \in D_n$.

Exercice 14. 1. Calculer le polynôme de degré 2 qui interpole aux points a $(-1, 4), (2, 4), (3, 8)$.

2. En déduire tous les polynômes qui « passent » par ces 3 points.

Exercice 15. (Oral CCP)

Calculer, pour $(a, b, c) \in \mathbb{K}^3$, $\begin{vmatrix} 1 & a & a^3 \\ 1 & b & b^3 \\ 1 & c & c^3 \end{vmatrix}$.

2 Plus difficile

Exercice 16. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 < r \leq n$.

1. Soit $E = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / MJ_r = 0\}$ où $J_r = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
 - (a) Dans cette question $n = 3$ et $r < 3$. Montrer que E est un espace vectoriel de dimension finie et donner sa dimension.
 - (b) Même question pour n quelconque
2. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang r . On pose $\Delta_A = \{M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), MA = 0_n\}$.
 - (a) Montrer que Δ_A est un sev de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
 - (b) Justifier qu'il existe $(P, Q) \in GL_n(\mathbb{R})$ tels que $A = PJ_rQ$.
 - (c) Montrer que $M \in \Delta_A \iff MP \in E$.
 - (d) Construire un isomorphisme de E dans Δ_A et en déduire dimension et base de Δ_A .

Exercice 17. Oral CCP 17 Soit u et v deux endomorphismes d'un espace de dimension finie tels que : $u \circ v - v \circ u = u$.

Montrer, en raisonnant par l'absurde, que u n'est pas bijectif.

Exercice 18. Soient P un polynôme de degré n et (a_0, \dots, a_n) des scalaires deux à deux distincts. Montrer que $(P(X + a_i))_{0 \leq i \leq n}$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

- Exercice 19.** 1. Soient $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ des réels distincts deux à deux et $f : T \in \mathbb{R}_{n-1}[X] \mapsto (T(\lambda_1^3), \dots, T(\lambda_n^3)) \in \mathbb{R}_n$. Montrer que f est un isomorphisme.
2. Expliciter T^{-1} (on pourra utiliser les polynômes de Lagrange)

Exercice 20. (extrait écrit Centrale) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$. On suppose que A et B sont semblables dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.

1. Justifier que toute matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ s'écrit : $M = M_1 + iM_2$ avec $(M_1, M_2) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$.
2. Justifier l'existence de deux matrices U et V à coefficients réels telles que $U + iV \in GL_n(\mathbb{C})$ et $(U + iV)A = B(U + iV)$.
3. Montrer que l'application $\lambda \mapsto \det(U + \lambda V)$ est un polynôme non nul sur \mathbb{C} .
4. En déduire l'existence de $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ tel que $U + \lambda_0 V \in GL_n(\mathbb{R})$.
5. Montrer que A et B sont semblables sur \mathbb{R} .