2.3 b) On somme les formules trigonométriques :

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \end{cases} \quad \text{pour obtenir} \quad \cos(a-b) - \cos(a+b) = 2\sin(a)\sin(b).$$

On a

$$\begin{cases} a - b = \omega_1 t \\ a + b = \omega_2 t \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \\ b = \dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2} t. \end{cases}$$

On en déduit $A\cos(\omega_1 t) - A\cos(\omega_2 t) = 2A\sin\left(\dfrac{\omega_2 - \omega_1}{2}\, t\right)\sin\left(\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2}\, t\right)$.

2.4 On utilise la formule trigonométrique : $\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$.
On a $A\sin(\omega t + \varphi) = A[\sin(\omega t)\cos(\varphi) + \cos(\omega t)\sin(\varphi)] = A\sin(\varphi)\cos(\omega t) + A\cos(\varphi)\sin(\omega t)$.
Ainsi, $B = A\sin(\varphi)$ et $C = A\cos(\varphi)$ conviennent.

2.5 a) On a $\sin(0) = 0$. La courbe 2 est la seule courbe passant par le point $(0,0)$ et est donc la seule courbe compatible. On vérifie aussi que la courbe 2 est comprise dans l'intervalle $[-1,1]$ et que sa période est égale à 2π.

2.5 b) On a $\cos(0) = 1$, ce qui est cohérent avec les courbes 1, 3 et 4. Ce n'est donc pas suffisant pour déterminer quelle courbe correspond à la fonction cosinus. Mais on sait de plus que $\cos(x) \in [-1,1]$, ce qui correspond à la courbe 4. On vérifie également que la courbe 4 a une période égale à 2π.

2.5 c) On a $1 + \sin(0) = 1$ et $1 + \sin(x) \in [0,2]$. Cela correspond à la courbe 3. On vérifie également que la courbe 3 a une période égale à 2π.

2.5 d) On a $\cos^2(0) = 1$ et $\cos^2(x) \in [0,1]$. Cela correspond à la courbe 1. C'est aussi la seule courbe qui a une période égale à π.

2.6 On peut mettre $A\sin(\omega t + \varphi)$ sous la forme $B\cos(\omega t) + C\sin(\omega t)$ avec $B = A\sin(\varphi)$ et $C = A\cos(\varphi)$. On a donc ici :

$$\begin{cases} A\sin(\varphi) = 1 \\ A\cos(\varphi) = 1 \end{cases}$$

En faisant le rapport des deux équations, on obtient $\dfrac{\sin(\varphi)}{\cos(\varphi)} = \tan(\varphi) = 1$, ce qui correspond à $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$.

On utilise alors la première équation : $A\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{A}{\sqrt{2}} = 1$. Donc, $A = \sqrt{2}$.

Finalement, $\cos(\omega t) + \sin(\omega t) = \sqrt{2}\sin(\omega t + \pi/4)$ ce qui correspond à la réponse c.

2.7 b) On lit graphiquement $u(0) = 0 = U_0\cos(\varphi)$. Donc, $\cos(\varphi) = 0$. Donc, $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$.

2.7 d) On a mesuré à la question précédente $T = 2\,\text{s}$. D'où $f = \dfrac{1}{T} = 0{,}5\,\text{Hz}$.

2.7 e) On a déterminé $f = 0{,}5\,\text{Hz}$ à la question précédente, d'où $\omega = 2\pi f = \pi\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

2.8 a) Le signal $u_1(t)$ atteint son premier maximum avant $u_2(t)$. Le signal $u_2(t)$ est donc en retard sur $u_1(t)$.

2.8 c) On lit graphiquement le retard $\tau = -1\,\mathrm{s}$ de $u_2(t)$ sur $u_1(t)$. On en déduit $\varphi = \omega\tau = -\dfrac{2\pi}{3}$ rad.

2.9 c) Le signal $u_1(t)$ a pour période $T_1 = 300\,\mu\mathrm{s}$. Le signal $u_2(t)$ a pour période $T_2 = \dfrac{1}{f_2} = 125\,\mu\mathrm{s}$. Enfin, le signal $u_3(t)$ a pour période $T_3 = \dfrac{2\pi}{\omega_3} = 628\,\mu\mathrm{s}$. On classe donc les trois signaux par ordre croissant de période : $T_2 < T_1 < T_3$ puis par identification : $u_3(t) \longleftrightarrow$ Voie A ; $u_1(t) \longleftrightarrow$ Voie B ; $u_2(t) \longleftrightarrow$ Voie C.

2.10 a) Par définition, on a $U_{\text{moy}} = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u(t)\,\mathrm{d}t$. On calcule donc :

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\int_0^T U_0\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t = \frac{U_0}{T} \times \frac{T}{2\pi}\left[\sin\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\right]_0^T = \frac{U_0}{2\pi}(0-0) = 0.$$

2.10 b) Par définition, on a $U_{\text{eff}} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T u(t)^2\,\mathrm{d}t}$. On calcule donc : ${U_{\text{eff}}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T U_0^2\cos^2\left(\frac{2\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t$.

Pour calculer cette intégrale, il faut linéariser le cosinus au carré. Pour cela, on peut utiliser les formules trigonométriques :

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 \qquad \text{donc} \qquad \cos^2(x) = \frac{1+\cos(2x)}{2}.$$

D'où,

$${U_{\text{eff}}}^2 = \frac{U_0^2}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{2} + \frac{\cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{U_0^2}{2}\left(\frac{1}{T}\int_0^T \mathrm{d}t\right) + \frac{U_0}{2}U_{\text{moy}} = \frac{U_0^2}{2}.$$

Ainsi, $U_{\text{eff}} = \dfrac{U_0}{\sqrt{2}}$.

2.11 a) On lit graphiquement que la période est $T = 4\,\mathrm{s}$ et que, sur une période, le signal prend les valeurs :

$$u(t) = \left|\begin{array}{l} 3\,\mathrm{V} \text{ si } 0\,\mathrm{s} < t \leqslant 1\,\mathrm{s} \\ 1\,\mathrm{V} \text{ si } 1\,\mathrm{s} < t \leqslant 4\,\mathrm{s}. \end{array}\right.$$

On calcule donc :

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 3\,\mathrm{d}t + \int_1^4 1\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{4}(3+3) = \frac{6}{4} = 1{,}5\,\mathrm{V}.$$

2.11 b) On a toujours $T = 4\,\mathrm{s}$ et

$$u(t) = \left|\begin{array}{l} 3\,\mathrm{V} \text{ si } 0\,\mathrm{s} < t \leqslant 1\,\mathrm{s} \\ 1\,\mathrm{V} \text{ si } 1\,\mathrm{s} < t \leqslant 4\,\mathrm{s}. \end{array}\right.$$

On calcule donc :

$${U_{\text{eff}}}^2 = \frac{1}{4}\left(\int_0^1 9\,\mathrm{d}t + \int_1^4 1\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{4}(9+3) = \frac{12}{4} = 3\,\mathrm{V}^2.$$

Donc, $U_{\text{eff}} = \sqrt{3}$ V.

2.12 a) On calcule

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{T}\left(\int_0^{T/2} U_0\,\mathrm{d}t + \int_{T/2}^T 0\,\mathrm{d}t\right) = \frac{U_0}{2}.$$